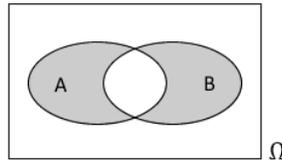


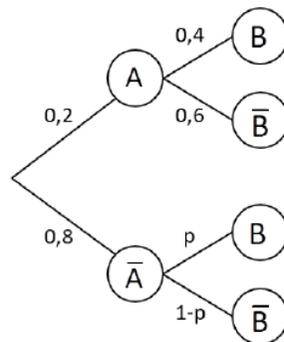
Fachabitur 2019 Mathematik NT Stochastik S I

Teilaufgabe 1. (3 BE)

A und B sind zwei beliebige (vereinbare) Ereignisse von Ω . Geben Sie das im Venn-Diagramm grau unterlegte Ereignis E_1 in möglichst einfacher Symbolschreibweise an und veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = A \cap \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.



Folgendes Baumdiagramm stellt die Ergebnisse eines zweistufigen Zufallsexperiments dar. Dabei gilt: $p \in \mathbb{R}$ und $0 \leq p \leq 1$



Teilaufgabe 2.1 (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert von p so, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B gilt: $P(B) = 0,24$.

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Das zweistufige Zufallsexperiment ist ein Gewinnspiel, bei dem man nur gewinnt, wenn das Ereignis $\overline{A} \cap \overline{B}$ eintritt.

Interpretieren Sie folgende Gleichung im Sachzusammenhang: $(0,8 \cdot (1-p))^3 = 0,001$

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Auf einem Schulfest wird als Gewinnspiel Dosenwerfen angeboten. Aus den Vorjahren weiß man, dass nur 10% der Teilnehmer es schaffen, alle Dosen abzuräumen und somit einen Gewinn zu erhalten. Betrachtet werden nun sieben zufällig ausgewählte aufeinanderfolgende Teilnehmer.

Geben Sie jeweils einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse berechnet werden kann:

E_1 : „Die letzten beiden Teilnehmer gewinnen.“

E_2 : „Gewinner und Verlierer wechseln sich ab.“

E_3 : „Genau drei Teilnehmer gewinnen und diese folgen aufeinander.“

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Ein großer Bergbauernhof bietet seinen Gästen während ihres Urlaubsaufenthalts verschiedene Möglichkeiten an, das Leben auf dem Land zu genießen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich die Hälfte aller Gäste auf einer der einsamen Hütten (H) zur Ruhe zu kommen, 30% verbringen ihren Aufenthalt im gemütlichen Stadl (S) und die übrigen Besucher übernachten im Bauernhaus (B). Bei der Anreise hat jeder Gast die Wahl, den steilen Weg bis zum Feriendomizil zu Fuß zurückzulegen (\overline{T}) oder sich von einem Traktorshuttle (T) nach oben befördern zu lassen. Von den Hüttenbewohnern nutzen nur ein Viertel diesen Service, bei den Stadlgästen sind es die Hälfte, und von den Gästen im Bauernhaus erklimmt keiner zu Fuß den Berg. Für Stadlgäste und Gäste des Bauernhauses besteht zusätzlich die Möglichkeit ein Frühstück (F) dazu zu buchen. Jeweils ein Fünftel dieser Gäste nutzen dieses Angebot nicht, unabhängig davon, ob der Shuttleservice in Anspruch genommen wird oder nicht. Hüttenbewohner können kein Frühstück buchen.

Die Befragung eines zufällig ausgewählten Gastes nach seinen getätigten Buchungen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Gast entscheidet sich gegen den Aufstieg zum Bergbauernhof.“

$E_2 = \{STF; S\bar{T}F; BTF\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$. Fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf Unvereinbarkeit.

Für Kinder gibt es auf dem Bauernhof spezielle Angebote, die stetig der Nachfrage angepasst werden sollen.

Derzeit stehen Ponys (P) zur Pferdepflege und für kleine Ausritte zur Verfügung. Ebenso besteht die Möglichkeit zur Mithilfe im Kuh- und Kälberstall (S). Aus dem Vorjahr ist bekannt, dass sich von 400 Kindern 108 für die Arbeit im Stall und 250 für die Ponys begeisterten, wobei 20% dieser Ponyinteressierten auch von der Mithilfe im Stall nicht genug bekommen konnten.

Teilaufgabe 5.1 (3 BE)

Berechnen Sie, für wie viel Prozent der Kinder ein Alternativangebot ohne Tierkontakt wünschenswert wäre.

Teilaufgabe 5.2 (2 BE)

Ermitteln Sie, ob die Mithilfe im Stall bei den Ponyinteressierten beliebter ist als bei denen, die sich nicht für Ponys begeistern.

Nachdem beim Besitzer des Bergbauernhofs im vorletzten Jahr immer wieder Anfragen nach Freizeitaktivitäten für Erwachsene eingingen, bietet er seit letztem Jahr auch die in folgender Preisliste aufgeführten Erlebnisse an:

<i>Preisliste für Erlebnisse</i>	
Melkkurs	12 €
Geführte Wanderung	8 €
Bayerischer Kochkurs	22 €
☺ 10 % Rabatt auf den Gesamtpreis bei Buchung der geführten Wanderung in Kombination mit dem Kochkurs! ☺	

Die Gäste zeigen erfahrungsgemäß folgendes Wahlverhalten:

nur Melkkurs	nur Kochkurs	nur geführte Wanderung	Kochkurs und geführte Wanderung	kein Erlebnis
15%	22%	18%	10%	35%

Andere Kombinationen von Erlebnissen wurden nicht gewählt.

Teilaufgabe 6.1 (2 BE)

Ermitteln Sie die zu erwartenden Einnahmen des Bergbauernhofs durch das Erlebnisangebot für das aktuelle Jahr, wenn mit 900 erwachsenen Gästen für dieses Jahr gerechnet wird.

Teilaufgabe 6.2 (3 BE)

Da es für einzelne Erlebnisse für die zeitgleich anwesenden Urlaubsgäste Teilnehmerbegrenzungen gibt, interessiert sich der Landwirt für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Bestimmen Sie diese.

E_3 : „Von 25 Gästen wählen genau acht nur die geführte Wanderung.“

E_4 : „Von 25 Gästen wählen mindestens vier und weniger als neun den Melkkurs.“

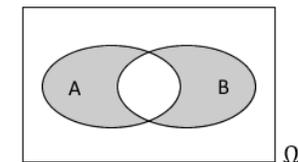
Teilaufgabe 7. (5 BE)

Aufgrund der steigenden Nachfrage nach „Urlaub auf dem Bauernhof“ überlegt der Besitzer des Bergbauernhofs zusätzlich ein besonderes Erlebnis, Übernachtungen im Freien auf einem gemütlichen Heuwagen, anzubieten. Ein befreundeter Bauernhofbesitzer behauptet basierend auf seinen Erfahrungen, dass höchstens 30% der Gäste dieses Angebot in Anspruch nehmen. Dennoch ist der Besitzer des Bergbauernhofs der festen Überzeugung, dass Übernachtungen im Freien ein neuer Trend sind und schätzt die Nachfrage deutlich höher ein (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen befragt er 200 seiner Gäste.

Entwickeln Sie für den Bauern einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5% und geben Sie an, ob der Behauptung des befreundeten Bauern auf Basis des Tests zugestimmt werden kann, wenn sich 131 Befragte gegen eine Übernachtung im Freien aussprechen.

Lösung**Teilaufgabe 1.** (3 BE)

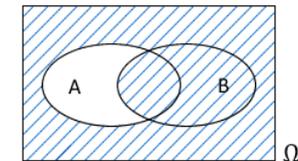
A und B sind zwei beliebige (vereinbare) Ereignisse von Ω . Geben Sie das im Venn-Diagramm grau unterlegte Ereignis E_1 in möglichst einfacher Symbolschreibweise an und veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = A \cap \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.

Lösung zu Teilaufgabe 1.

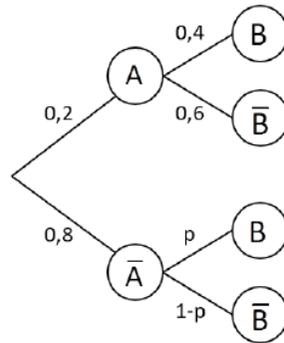
Ereignis in Mengenschreibweise

$$E_1 = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$E_2 = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

**Teilaufgabe 2.1** (2 BE)

Folgendes Baumdiagramm stellt die Ergebnisse eines zweistufigen Zufallsexperiments dar. Dabei gilt: $p \in \mathbb{R}$ und $0 \leq p \leq 1$



Bestimmen Sie den Wert von p so, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B gilt: $P(B) = 0,24$.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1

Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = 0,8 \cdot p + 0,2 \cdot 0,4$$

$$0,24 = 0,8p + 0,08$$

$$0,16 = 0,8p$$

$$\Rightarrow p = 0,2$$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Das zweistufige Zufallsexperiment ist ein Gewinnspiel, bei dem man nur gewinnt, wenn das Ereignis $\bar{A} \cap \bar{B}$ eintritt.

Interpretieren Sie folgende Gleichung im Sachzusammenhang: $(0,8 \cdot (1-p))^3 = 0,001$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, bei 3-maligem Spiel nur zu gewinnen, beträgt 0,001.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Auf einem Schulfest wird als Gewinnspiel Dosenwerfen angeboten. Aus den Vorjahren weiß man, dass nur 10% der Teilnehmer es schaffen, alle Dosen abzuräumen und somit einen Gewinn zu erhalten. Betrachtet werden nun sieben zufällig ausgewählte aufeinanderfolgende Teilnehmer.

Geben Sie jeweils einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse berechnet werden kann:

E_1 : „Die letzten beiden Teilnehmer gewinnen.“

E_2 : „Gewinner und Verlierer wechseln sich ab.“

E_3 : „Genau drei Teilnehmer gewinnen und diese folgen aufeinander.“

Lösung zu Teilaufgabe 3.

Wahrscheinlichkeit

$$p = 10\% = 0,1 \quad (\text{Trefferwahrscheinlichkeit})$$

$$P(E_1) = \underbrace{1^5}_{\text{die ersten 5 gewinnen oder verlieren}} \cdot 0,1^2$$

$$P(E_2) = \underbrace{0,1^4 \cdot 0,9^3}_{\text{erst Gewinner, dann Verlierer}} + \underbrace{0,9^4 \cdot 0,1^3}_{\text{erst Verlierer, dann Gewinner}}$$

$$P(E_3) = \underbrace{5}_{\text{Anzahl Möglichkeiten Reihenfolge Gewinner}} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^4$$

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Ein großer Bergbauernhof bietet seinen Gästen während ihres Urlaubsaufenthalts verschiedene Möglichkeiten an, das Leben auf dem Land zu genießen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich die Hälfte aller Gäste auf einer der einsamen Hütten (H) zur Ruhe

zu kommen, 30% verbringen ihren Aufenthalt im gemütlichen Stadl (S) und die übrigen Besucher übernachten im Bauernhaus (B). Bei der Anreise hat jeder Gast die Wahl, den steilen Weg bis zum Feriendomizil zu Fuß zurückzulegen (\bar{T}) oder sich von einem Traktorshuttle (T) nach oben befördern zu lassen. Von den Hüttenbewohnern nutzen nur ein Viertel diesen Service, bei den Stadlgästen sind es die Hälfte, und von den Gästen im Bauernhaus erklimmt keiner zu Fuß den Berg. Für Stadlgäste und Gäste des Bauernhauses besteht zusätzlich die Möglichkeit ein Frühstück (F) dazu zu buchen. Jeweils ein Fünftel dieser Gäste nutzen dieses Angebot nicht, unabhängig davon, ob der Shuttleservice in Anspruch genommen wird oder nicht. Hüttenbewohner können kein Frühstück buchen. Die Befragung eines zufällig ausgewählten Gastes nach seinen getätigten Buchungen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.

Lösung zu Teilaufgabe 4.1

Baumdiagramm erstellen

Aus der Angaben der Aufgabe sind die Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen:

$$P(H) = 0,5$$

$$P(S) = 30\% = 0,3$$

$$P(B) = 1 - (0,5 + 0,3) = 0,2$$

$$P_H(T) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P_H(\bar{T}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P_S(T) = 0,5$$

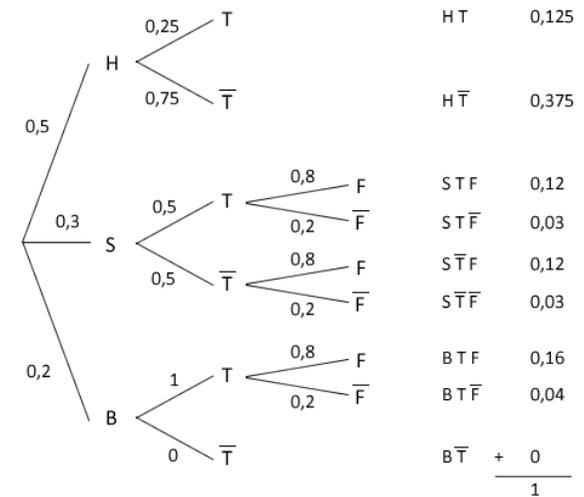
$$P_S(\bar{T}) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P_B(T) = 1$$

$$P_B(\bar{T}) = 0$$

$$P_T(\bar{F}) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P_T(F) = 1 - 0,2 = 0,8$$



Teilaufgabe 4.2 (4 BE)

Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein Gast entscheidet sich gegen den Aufstieg zum Bergbauernhof.“

$E_2 = \{STF; S\bar{T}F; BT F\}$

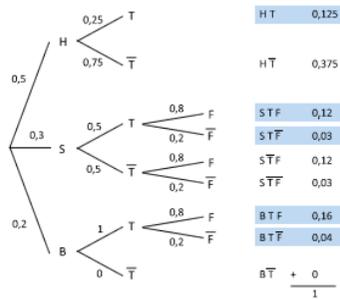
Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$. Fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf Unvereinbarkeit.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2

Ereignis in Mengenschreibweise

$$E_1 = \{HT; STF; S\bar{T}F; BT F; BT \bar{F}\}$$

Wahrscheinlichkeit



$$P(E_1) = 0,125 + 0,12 + 0,03 + 0,16 + 0,04 = \frac{19}{40} = 0,475$$

Ereignis beschreiben

E_2 : Ein Gast wählt Frühstück

Unvereinbarkeit zweier Ereignisse

Prüfen auf Unvereinbarkeit:

Erläuterung: *Unvereinbarkeit*

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen unvereinbar, wenn gilt:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad (\emptyset = \text{leere Menge})$$

Wenn zwei Ereignisse unvereinbar sind, dann können sie nicht gleichzeitig eintreten.

(s. auch Merkhilfe Mathematik)

$$E_1 \cap E_2 = \{STF; BTF\} \neq \emptyset \Rightarrow E_1 \text{ und } E_2 \text{ sind vereinbar}$$

Teilaufgabe 5.1 (3 BE)

Für Kinder gibt es auf dem Bauernhof spezielle Angebote, die stetig der Nachfrage angepasst werden sollen.

Derzeit stehen Ponys (P) zur Pferdepflege und für kleine Ausritte zur Verfügung. Ebenso besteht die Möglichkeit zur Mithilfe im Kuh- und Kälberstall (S). Aus dem Vorjahr ist bekannt, dass sich von 400 Kindern 108 für die Arbeit im Stall und 250 für die Ponys begeisterten, wobei 20% dieser Ponyinteressierten auch von der Mithilfe im Stall nicht genug bekommen konnten.

Berechnen Sie, für wie viel Prozent der Kinder ein Alternativangebot ohne Tierkontakt wünschenswert wäre.

Lösung zu Teilaufgabe 5.1

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

Gegebene Wahrscheinlichkeiten:

$$P(S) = \frac{108}{400} = 0,27; \quad P(P) = \frac{250}{400} = 0,625$$

$$P(P \cap S) = 0,2 \cdot 0,625 = 0,125$$

	S	\bar{S}	Σ
P	0,125		0,625
\bar{P}			
Σ	0,27		

Tafel vervollständigen:

	S	\bar{S}	Σ
P	0,125	0,5	0,625
\bar{P}	0,145	0,23	0,375
Σ	0,27	0,73	1

$$P(\bar{P} \cap \bar{S}) = 0,23 = 23\%$$

Teilaufgabe 5.2 (2 BE)

Ermitteln Sie, ob die Mithilfe im Stall bei den Ponyinteressierten beliebter ist als bei denen, die sich nicht für Ponys begeistern.

Lösung zu Teilaufgabe 5.2**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$P_P(S) = 0,2 \quad (\text{s. Teilaufgabe 5.1})$$

	S	\bar{S}	Σ
P	0,125	0,5	0,625
\bar{P}	0,145	0,23	0,375
Σ	0,27	0,73	1

$$P_{\bar{P}}(S) = \frac{P(\bar{P} \cap S)}{P(\bar{P})} = \frac{0,145}{0,375} \approx 0,387$$

Die Mithilfe im Stall ist bei den Nichtponyinteressierten beliebter.

Teilaufgabe 6.1 (2 BE)

Nachdem beim Besitzer des Bergbauernhofs im vorletzten Jahr immer wieder Anfragen nach Freizeitaktivitäten für Erwachsene eingingen, bietet er seit letztem Jahr auch die in folgender Preisliste aufgeführten Erlebnisse an:

Preisliste für Erlebnisse	
Melkkurs	12 €
Geführte Wanderung	8 €
Bayerischer Kochkurs	22 €
☺ 10 % Rabatt auf den Gesamtpreis bei Buchung der geführten Wanderung in Kombination mit dem Kochkurs! ☺	

Die Gäste zeigen erfahrungsgemäß folgendes Wahlverhalten:

nur Melkkurs	nur Kochkurs	nur geführte Wanderung	Kochkurs und geführte Wanderung	kein Erlebnis
15%	22%	18%	10%	35%

Andere Kombinationen von Erlebnissen wurden nicht gewählt.

Ermitteln Sie die zu erwartenden Einnahmen des Bergbauernhofs durch das Erlebnisangebot für das aktuelle Jahr, wenn mit 900 erwachsenen Gästen für dieses Jahr gerechnet wird.

Lösung zu Teilaufgabe 6.1**Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$\text{Rabatt: } 0,1 \cdot (8 + 22) = 3 \text{ €}$$

x_i Preis in €	12	22	8	27	0
$P(X = x_i)$	0,15	0,22	0,18	0,1	0,35

Erwartungswert einer Zufallsgröße

$$E(X) = 12 \cdot 0,15 + 22 \cdot 0,22 + 8 \cdot 0,18 + 27 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,35 = 10,78 \text{ €}$$

Einnahmen: $900 \cdot 10,78 = 9702 \text{ €}$

Teilaufgabe 6.2 (3 BE)

Da es für einzelne Erlebnisse für die zeitgleich anwesenden Urlaubsgäste Teilnehmerbegrenzungen gibt, interessiert sich der Landwirt für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Bestimmen Sie diese.

E_3 : „Von 25 Gästen wählen genau acht nur die geführte Wanderung.“

E_4 : „Von 25 Gästen wählen mindestens vier und weniger als neun den Melkkurs.“

Lösung zu Teilaufgabe 6.2

Binomialverteilung

$p(\text{„Wanderung“}) = 0,18$

$$P(E_3) = P_{0,18}^{25}(X = 8) = \binom{25}{8} \cdot 0,18^8 \cdot 0,82^{17} \approx 0,04084$$

$p(\text{„Melkkurs“}) = 0,15$

$$P(E_4) = P_{0,15}^{25}(4 \leq X < 9) = P_{0,15}^{25}(X \leq 8) - P_{0,15}^{25}(X \leq 3) \stackrel{\text{TW}}{=} 0,99203 - 0,47112 = 0,52091$$

Teilaufgabe 7. (5 BE)

Aufgrund der steigenden Nachfrage nach „Urlaub auf dem Bauernhof“ überlegt der Besitzer des Bergbauernhofs zusätzlich ein besonderes Erlebnis, Übernachtungen im Freien auf einem gemütlichen Heuwagen, anzubieten. Ein befreundeter Bauernhofbesitzer behauptet basierend auf seinen Erfahrungen, dass höchstens 30% der Gäste dieses Angebot in Anspruch nehmen. Dennoch ist der Besitzer des Bergbauernhofs der festen Überzeugung, dass Übernachtungen im Freien ein neuer Trend sind und schätzt die Nachfrage deutlich höher ein (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen befragt er 200 seiner Gäste.

Entwickeln Sie für den Bauern einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5% und geben Sie an, ob der Behauptung des befreundeten Bauern auf Basis des Tests zugestimmt werden kann, wenn sich 131 Befragte gegen eine Übernachtung im Freien aussprechen.

Lösung zu Teilaufgabe 7.

Hypothesentest - Fehler erster Art

Text analysieren und Daten herauslesen:

T : Anzahl der Gäste, die das Angebot nutzen, von 200.

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,3$

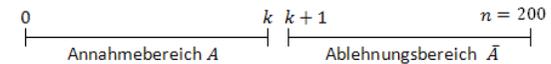
Gegenhypothese: $H_1 : p_1 > 0,3$

Stichprobenumfang: $n = 200$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Erläuterung: *Nullhypothese, Gegenhypothese*

Da hier die Gegenhypothese „ $p_1 > 0,3$ “ bzw. „Nachfrage **höher** (als)“ lautet, liegt der Annahmehereich links und der Ablehnungsbereich rechts.



Annahmehereich von H_0 : $A = [0, k]$

Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = [k + 1, 200]$

Fehler 1. Art bestimmen:

Erläuterung: *Fehler 1. Art*

Man spricht von „Fehler 1. Art“, wenn die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird (s. auch Merkhilfe Mathematik).

Das ist der Fall, wenn H_0 wahr ist, man sich aber gegen H_0 entscheidet, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt ($T \geq k + 1$).

$$\Rightarrow \text{Fehler erster Art: } P_{0,3}^{200}(T \geq k + 1) \leq 0,05$$

$$P_{0,3}^{200}(T \geq k + 1) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Betrachtung des Gegenereignisses:

$$P(\text{„mindestens } k + 1 \text{ Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens } k \text{ Treffer“})$$

In mathematischen Zeichen:

$$P(X \geq k + 1) = 1 - P(X \leq k)$$

$$1 - P_{0,3}^{200}(T \leq k) \leq 0,05$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$1 - P_{0,3}^{200}(T \leq k) \leq 0,05 \quad | -1$$

$$-P_{0,3}^{200}(T \leq k) \leq -0,95 \quad | \cdot (-1)$$

(Das Relationszeichen dreht sich, da mit einer negativen Zahl multipliziert wird.)

$$P_{0,3}^{200}(T \leq k) \geq 0,95$$

$$P_{0,3}^{200}(T \leq k) \geq 0,95$$

Aus dem Tafelwerk ablesen: $k \geq 71$

Entscheidungsregel:



$$A = \{0, \dots, 71\}$$

$$200 - 131 = 69 \in A \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ wird angenommen}$$

Dem Freund sollte geglaubt werden.