Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Die Ebene F ist in Parameterform gegeben. Mit $v,w \in \mathbb{R}$ gilt

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Koordinatenform wird ein Normalenvektor aus den Richtungsvektoren bestimmt (siehe Kästchen)

$$\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beachte :

Der Normalenvektor kann schnell durch folgendes Schema berechnet werden :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dabei schreibt man die beiden Richtungsvektoren der Ebene zweimal untereinander, streicht die erste und letzte Zeile und berechnet für jede Komponente des Normalenvektors die Determinante einer 2x2-Matrix.

Klassischer Weg : Der Normalenvektor muss senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene F stehen. Daraus ergeben sich 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 0$$
$$2n_1 + 0 + 2n_3 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lccccc} (I) & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ (II) & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ (III) & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array} \qquad 2 \cdot (I) - (II)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lccccc} (I) & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ (II) & 0 & 4 & 2 & | & 0 \\ (III) & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$n_3 = t \in \mathbb{R}, \quad n_2 = -0{,}5t \quad \text{und } n_1 = -t$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -0{,}5t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt durch Einsetzen des Punktes P (3 | 2 | -3) für x, y und z die Koordinatenform der Ebene F :

$$2x + y - 2 \cdot z = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 14$$

In der Aufgabe ist außerdem eine Ebenenschar gegeben :

$$E_t = (1 + t) \cdot x + t \cdot y - 2 \cdot z = 14 \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Vergleich der Ebene F mit der Ebenenschar E_t ergibt

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Für $t = 1$ sind die Bedingungen erfüllt, das heißt die Ebene F ist identisch mit E_1 ,
F ist also eine Ebene der gegebenen Schar.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Die Lagebeziehung der Ebene F und der Ebene E_3 soll untersucht werden. Die beiden Ebenengleichungen in Koordinatenform lauten

$$\begin{aligned} F:&\ 2x + y - 2z = 14 \\ E_3:&\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{aligned}$$

Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht kollinear, die Ebenen schneiden sich, die Schnittgerade gibt die Menge der gemeinsamen Punkte an. Zu lösen ist somit das folgende lineare Gleichungssystem :

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 14 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

Beachte :

Zwei Ebenen E und F im dreidimensionalen Raum können nur drei Lagen zueinander einnehmen. Sind die Normalenvektoren kollinear, so gilt

(1) E = F oder

(2) E ∥ F (echt parallel)

Sind die Normalenvektoren nicht kollinear, so gilt

(3) E und F haben eine Schnittgerade

$$\begin{array}{lccccc} (\mathrm{I}) & 2 & 1 & -2 & | & 14 \\ (\mathrm{II}) & 4 & 3 & -2 & | & 14 \\ (\mathrm{III}) & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array} \qquad 2\cdot(\mathrm{I})-(\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{lccccc} (\mathrm{I}) & 2 & 1 & -2 & | & 14 \\ (\mathrm{II}) & 0 & -1 & -2 & | & 14 \\ (\mathrm{III}) & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$z = t \in \mathbb{R}, \qquad y = -2t-14 \qquad x = 2t+14$$

Diese Lösungsmenge lässt sich in Form einer Geradengleichung schreiben. Alle Punkte dieser Geraden (Schnittgeraden) sind gemeinsame Punkte beider Ebenen.

$$g_S:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t+14 \\ -2t-14 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zur Teilaufgabe 2 (7 BE)

Es sind zwei Ebenen der Schar zu suchen, die orthogonal zueinander sind. Seien

$$E_t:\ (t+1)x+ty-2z=14$$
$$E_s:\ (s+1)x+sy-2z=14$$

zwei Ebenen der Schar und $\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_s} = \begin{pmatrix} s+1 \\ s \\ -2 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Normalenvektoren. Ein Schnittwinkel von $\alpha = 90°$ bedeutet, dass die Normalenvektoren der beiden Ebenen orthogonal zueinander sein müssen. Das wiederum bedeutet, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ergibt. Mit der algebraischen Definition des Skalarprodukts ergibt sich :

$$\begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} s+1 \\ s \\ -2 \end{pmatrix} = (t+1)\cdot(s+1)+st+4=0$$
$$s\cdot t+s+t+1+s\cdot t+4=0$$
$$2s\cdot t+s+t+5=0$$

Beachte :

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α gibt es eine geometrische Definition

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

sowie eine algebraische Definition

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann einer der beiden Parameter s oder t frei gewählt werden, z.B. $t = 1$ Damit ergibt sich für den zweiten Parameter s folgende Gleichung :

$$2s + s + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = -2$$

Zwei mögliche Ebenen wären also

$$E_1 : \quad 2x + 1y - 2z = 14$$
$$E_{-2} : -1x - 2y - 2z = 14$$

Lösung zur Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Idee: Nimmt man 3 Punkte der Ebene F im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, bildet sie mit Hilfe der Abbildungsmatrizen M und N ab, so erhält man jeweils 3 Bildpunkte, aus denen wieder „Ebenengleichungen“ erstellt werden können. Drei mögliche Punkte sind

$$P_1(3|2|-3), \quad P_2(4|4|-1) \quad \text{und} \quad P_3(5|2|-1)$$

Multiplikation der Ortsvektoren der drei Punkte mit der Matrix M liefert

$$\overrightarrow{p_1'} = M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beachte :

Multipliziert man eine (m x n)-Matrix mit einer (n x r)-Matrix, so ist das Ergebnis eine (m x r)-Matrix. Vektoren kann man als (n x 1)_Matrizen interpretieren

In diesem Fall ergibt die Multiplikation einer (4 x 3)-Matrix mit einem (3 x 1)-Vektor einen (4 x 1)-Vektor

Ein einfaches Hilfsmittel zur Berechnung von Matrixprodukten ist das Falksche Schema

analog berechnet man die Ortsvektoren der beiden anderen Punkte und erhält die drei Bildpunkte

$$P_1'(3|2|5|-3), \quad P_2'(4|4|8|-1) \quad \text{und} \quad P_3'(5|2|7|-1)$$

Aus diesen Punkten kann auf bekannte Weise eine Bildebene hergeleitet werden

$$F_M : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die zur Abbildungsmatrix N gehörende Bildebene N_F wird auf analoge Weise erzeugt. Beispielhaft die Berechnung des Bildpunktes von P_1

$$\overrightarrow{p_1'} = N \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Ortsvektoren der beiden anderen Punkte berechnet man analog und erhält auch in diesem Fall drei Bildpunkte

$$P_1'\left(2|3|3|-3\right), \quad P_2'\left(4|4|4|-1\right) \text{ und } P_3'\left(2|5|5|-1\right)$$

aus denen die Bildebene N_F gewinnt.

$$F_N: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zur Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Die Parameterdarstellungen der Ebenen F_M und F_N sind nicht eindeutig. In der Aufgabe 3.2 werden zwei weitere Parameterformen der beiden Ebenen vorgegeben

$$F_M: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_N: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$r, s, t, u \in \mathbb{R}$$

Zur Untersuchung der Lagebeziehung der beiden Ebenen soll ein lineares Gleichungssystem aufgestellt aber nicht gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 4+r+s &= 2+2u \\ 4+2s &= 5+t+u \\ 8+r+3s &= -1+t+2u \\ -1+r+2s &= -1+t+2u \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} r+s-2u &= -2 \\ 2s-t-u &= 1 \\ r+3s-t-u &= -3 \\ r+2s-t-2u &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems war gegeben. Es gilt

$$r = -2 \;, \qquad s = -2 \;, \qquad t = -4 \qquad \text{und} \qquad u = -1$$

Interpretation des Ergebnisses :

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist eindeutig, das heißt die beiden Ebenen schneiden sich in einem Punkt. Einsetzen der Lösungsvariablen in die Ebenengleichungen liefert den Punkt $P\left(0\middle|0\middle|0\middle|-7\right)$. Das Ergebnis ist insofern bemerkenswert, denn im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ können sich 2 Ebenen nicht in nur einem Punkt schneiden, im vierdimensionalen Raum $\mathbb{R}^4$ aber wohl.

Eine Analogie zum $\mathbb{R}^3$ ergibt sich durch folgende Überlegung :

Im vierdimensionalen Raum können sich dreidimensionale Unterräume (Ebenen) in einem Punkt schneiden. Im dreidimensionalen Raum können sich zweidimensionale Unterräume (Geraden) ebenfalls in einem Punkt schneiden.