Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Die Hangebene H ist in Parameterform gegeben. Mit $r,s \in \mathbb{R}$ gilt

$$H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Koordinatenform wird ein Normalenvektor aus den Richtungsvektoren bestimmt.

$$\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beachte :

Der Normalenvektor kann schnell durch folgendes Schema berechnet werden :

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 \\ (-3) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dabei schreibt man die beiden Richtungsvektoren der Ebene zweimal untereinander, streicht die erste und letzte Zeile und berechnet für jede Komponente des Normalenvektors die Determinante einer 2x2-Matrix.

Damit folgt durch Einsetzen des Punktes P (2 | -2 | 4) für x, y und z die Koordinatenform der Ebene H :

$$x + y + 2 \cdot z = 2 - 2 + 2 \cdot 4 = 8$$

Der Winkel α zwischen der Hangebene und der x-y-Ebene kann mit Hilfe der beiden Normalenvektoren

$$\overrightarrow{n_H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ der Hangebene und } \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ der x-y-Ebene}$$

und der Formel $\quad \cos(\alpha) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_H} \bullet \overrightarrow{n_E}\right|}{\left|\overrightarrow{n_H}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_E}\right|}$

berechnet werden. Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0{,}8165$$

Daraus folgt für den Neigungswinkel des Hangs : $\alpha \approx 35{,}26°$

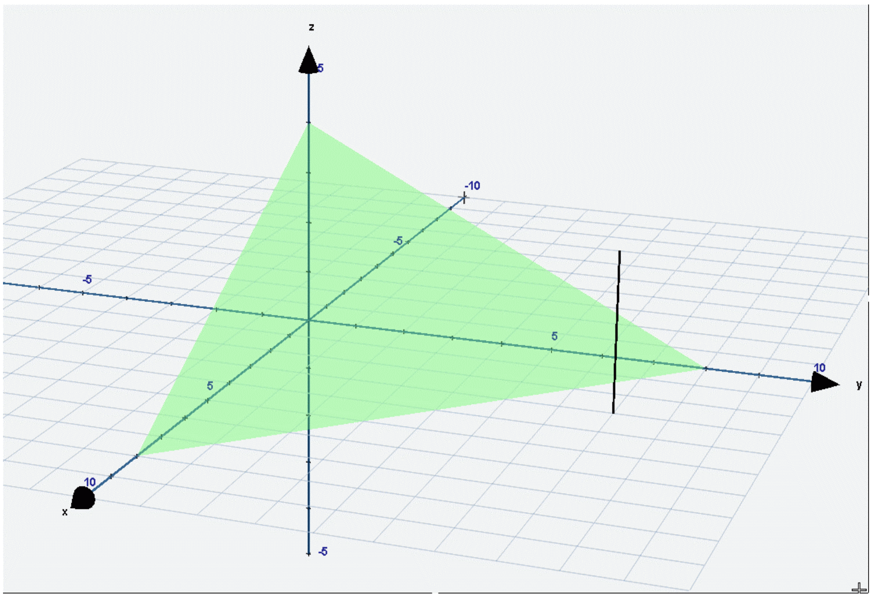
Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Hangebene soll mit Hilfe ihrer Spurpunkte, das sind die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit der Ebene, skizziert werden. Aus der Achsenabschnittsform lassen sich diese Spurpunkte schnell ermitteln.

Es gilt :

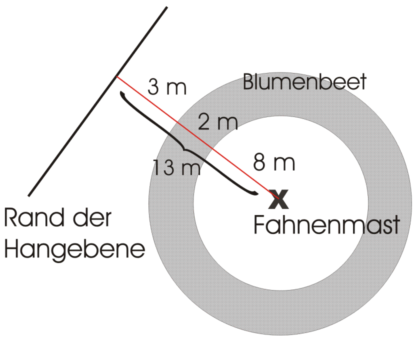
$$x + y + 2z = 8 \quad \Big| :8$$
$$\frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{4} = 1$$

und daraus können die gesuchten Spurpunkte
$S_x = (8|0|0)$ $S_y = (0|8|0)$ und $S_z = (0|0|4)$ abgelesen werden. Die Skizze der Hangebene inklusive Maibaum erhält damit folgendes Aussehen :



Lösung zu Teilaufgabe 2 (6 BE)

Ein Landschaftsgärtner möchte um den Fahnenmast ein ringförmiges Blumenbeet mit einem inneren Durchmesser von 8 m anlegen. Aufgrund der Breite des Beets von 2 m und dem geforderten Hangabstand von 3 m ergibt sich ein Gesamtabstand von 13 m, den der Maibaum vom Hang einhalten muss.
Alle für den Sachverhalt relevanten geometrischen Größen liegen in der x-y-Ebene. Zu überprüfen ist, ob der Fußpunkt des Maibaums von der Geraden g, die den Rand der Hangebene beschreibt, mindestens 13 m entfernt ist.



Die Gerade g (Rand der Hangebene) verläuft durch die beiden Spurpunkte S_x und S_y , also gilt

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Der Fußpunkt des Maibaums ist $F(3|7|0)$

ein beliebiger Punkt der Geraden g ist $R\ (8-r|r|0)$

der Verbindungsvektor der Punkte R und P ist $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix}8-r-3\\r-7\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-r\\r-7\\0\end{pmatrix}$

Für den zur Berechnung des Abstands notwendigen Lotfußpunkt L muss gelten :

$$\begin{pmatrix}5-r\\r-7\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(5-r)\cdot(-8)+(r-7)\cdot 8 = 0$$
$$-40+8r+8r-56 = 0$$
$$16r = 96$$
$$r=6$$

Daraus folgt für den Lotfußpunkt L : $L\ (2|6|0)$

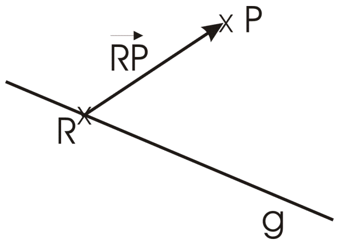
Für den Abstand d der Punkte L und F gilt

$$d=\left|\left(\overrightarrow{LF}\right)\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}414$$

Der Abstand beträgt also rund 1,414 LE, was 14,14 m in der Realität entspricht. Der geforderte Mindestabstand von 13 m wird eingehalten.

Beachte :

Dieses Verfahren wird auch das Verfahren des „laufenden Punktes“ genannt. Ein Punkt R „läuft“ auf einer Geraden g solange hin und her,



bis der Vektor $\overrightarrow{RP}$ senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g verläuft.

Beachte :

Der gesuchte Abstand kann auch mit dem Lotfußpunktverfahren unter Verwendung einer Hilfsebene

$$E:\ \left[\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}-\vec{x}\right]\bullet\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

oder mit Methoden der Analysis (minimale Entfernung eines Punktes von einer Geraden) gelöst werden.

$f(x)=\sqrt{(5-2)^2+(r-7)^2}$ und

$f'(x)=0$

Lösung zu Teilaufgabe 3 (6 BE)

Zur Berechnung des Schattenpunkts S_H der Mastspitze auf der Hangebene H wird die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Hangebene H : x + y + 2z = 8 gleichgesetzt

$$\begin{aligned} (3-3r)\cdot 1 + (7-3r)\cdot 1 + (3-r)\cdot 2 &= 8 \\ 3-3r+7-3r+6-2r &= 8 \\ -8r &= -8 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Schattenpunkt $S_H = (0|4|2)$

Beachte :

Zur Berechnung von „Knickpunkten“ eines Schattens an Hauswänden, Dachschrägen, Hangebenen etc. ist es von Vorteil eine Schattenebene zu definieren, deren Richtungsvektoren durch die Richtung der Sonnenstrahlen und in diesem Fall durch die Richtung des Mastes gebildet werden

Es ist zu zeigen, dass der Schatten des Maibaums im Punkt R(2 | 6 | 0) von der x-y-Ebene auf die Hangebene übergeht. Gesucht ist also der Schnittpunkt zwischen der Schattenebene und der in Aufgabe 2 bereits verwendeten Spurgeraden g.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &(I) \quad 3-3s = 8-t \\ &(II) \quad 7-3s = t \\ &(III) \quad 3+r+s = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (I)-(II) \text{ ergibt } \quad -4 &= 8-2t \\ t &= 6 \end{aligned}$$

eingesetzt in $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Punkt R aus der Aufgabenstellung wird dadurch bestätigt.

Lösung zur Teilaufgabe 4.1 (5 BE)

In dieser Aufgabe ist eine Abbildungsmatrix M gesucht, welche die Projektion eines beliebigen Punktes P (x |y | z) in Richtung der Sonnenstrahlen auf die Ebene E mit der Gleichung $x + y + 2z = 0$ beschreibt.

Zur Erinnerung :

Ist eine Projektionsmatrix M gegeben, so erhält man

die Projektionsebene als Lösung der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (Menge der Fixpunkte der Abbildung)

und die Projektionsrichtung als Lösung der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (Kern der Matrix, Fixgerade).

Für jede Projektionsmatrix M muss gelten : $M \cdot M = M$

Richtung der schrägen Projektion : $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichung der Projektionsgeraden : $g_p : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Projektionsebene : $E : \; x + y + 2z = 0$

$E \cap g_p$:

$$x - 3r + y - 3r + 2 \cdot (z - r) = 0$$
$$-8r = -x - y - 2z$$
$$r = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{2}{8}z$$

Berechnung des Bildpunktes $P'(x'|y'|z')$ von $P(x|y|z)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{2}{8}z\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}y - \frac{6}{8}z \\ -\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}y - \frac{6}{8}z \\ -\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{2}{8}z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +\frac{5}{8}x - \frac{3}{8}y - \frac{6}{8}z \\ -\frac{3}{8}x + \frac{5}{8}y - \frac{6}{8}z \\ -\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{6}{8}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{6}{8} \\ -\frac{3}{8} & +\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & +\frac{6}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Projektionsmatrix M zu $M = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung zur Teilaufgabe 4.2 (3 BE)

Die Gleichung $\overrightarrow{0P''} = M \cdot \overrightarrow{0P} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Hintereinanderausführung einer Projektion und einer Verschiebung. Zunächst wird durch die Matrix M ein beliebiger Punkt P (x | y | z) des Raumes auf einen Punkt P' (x' | y' | z') der Ebene E abgebildet. Für P' muss gelten :

$$x' + y' + 2z' = 0.$$

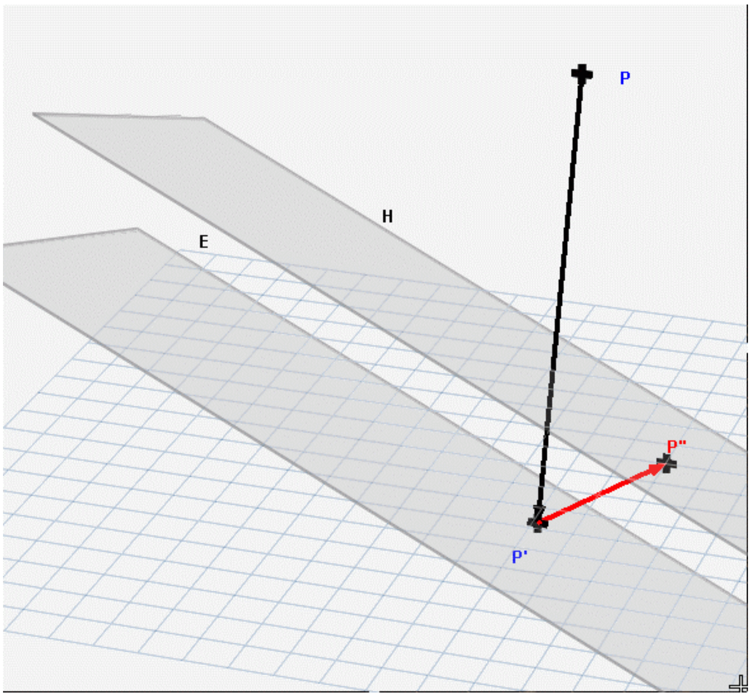
Verschiebt man anschließend den Punkt P' in Richtung des Vektors $\frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, so

erhält man den Punkt P'' (x' + 2,4 | y' + 2,4 | z' +1,6)

Dies ist ein Punkt der Ebene H, denn

$$x' + 2{,}4 + y' + 2{,}4 + 2\,(z' + 1{,}6) = x' + y' + 2\,z' + 2{,}4 + 2{,}4 + 3{,}2 = 0 + 8 = 8.$$

Jeder Punkt des Raums wird also zunächst auf die Ebene E projeziert und dann auf die parallele Ebene H verschoben (siehe Skizze unten)



Zur Erinnerung :

Die durch

$\overrightarrow{0P''} = M \cdot \overrightarrow{0P} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

definierte Abbildung gehört zu den affinen Abbildungen, weil im Gegensatz zu den linearen Abbildungen für den Nullvektor gilt :

$\overrightarrow{0''} \neq \vec{0}$,

der Nullpunkt also kein Fixpunkt ist