Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Eine defekte Fotozelle wird bei einer Kontrolle mit $p = \frac{1}{5}$ nicht entdeckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Zelle erst im dritten Kontrolldurchlauf auffällt, beträgt daher

$$P\,(- - +) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = 0{,}032 = 3{,}2\,\%.$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Hier sollen zehn fehlerhafte Zellen untersucht werden, es geht um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese entdeckt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine fehlerhafte Zelle **nicht** entdeckt wird, beträgt $q = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}008$, damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zelle entdeckt wird $p = 1 - q = 0{,}992$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass von den zehn fehlerhaften Zellen mindestens 9 entdeckt werden, gilt

$$\begin{aligned} P\,(X \geq 9) &= P\,(X = 9) + P\,(X = 10) \\ &= \mathrm{B}\,(10; 0{,}992; 9) + \mathrm{B}\,(10; 0{,}992; 10) \approx 0{,}9972 = 99{,}72\,\%. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, unter den ersten 5 nur drei fehlerhafte Zellen zu entdecken, die restlichen 5 Zellen dann jedoch alle als fehlerhaft auszusortieren, beträgt

$$P\,(\mathrm{B}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}992^8 \cdot 0{,}008^2 \approx 0{,}0006 = 0{,}06\,\%.$$

Insgesamt sollen 8 Zellen als defekt aussortiert und 2 als nicht defekt behalten werden, unter den ersten 5 Zellen gibt es $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, die drei als defekt deklarierten Zellen zu verteilen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Die Zuverlässigkeit von Rauchmeldern soll dadurch erhöht werden, dass statt wie bisher nur eine in Zukunft drei Fotozellen verbaut werden. Ein Alarm wird erst dann ausgelöst, wenn von den drei Zellen mindestens zwei einen Alarm auslösen.

Es sollen im Folgenden Rauchmelder betrachtet werden, deren Fotozellen mit $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}5$ oder $p_3 = 0{,}7$ einen Alarm auslösen. Für die Wahrscheinlichkeit, dass diese Rauchmelder einen Alarm auslösen, gilt

$$\begin{aligned}
P(p_1) &= \mathrm{B}\,(3; 0{,}3; 2) + \mathrm{B}\,(3; 0{,}3; 3) = 0{,}216 \\
P(p_2) &= \mathrm{B}\,(3; 0{,}5; 2) + \mathrm{B}\,(3; 0{,}5; 3) = 0{,}5 \\
P(p_3) &= \mathrm{B}\,(3; 0{,}7; 2) + \mathrm{B}\,(3; 0{,}7; 3) = 0{,}784.
\end{aligned}$$

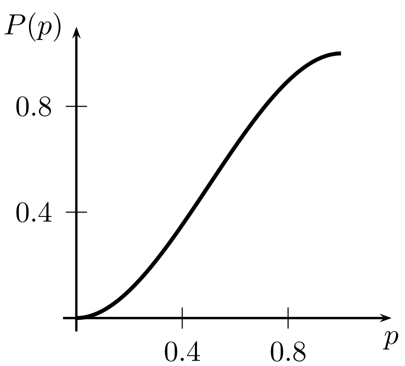
Die Zuverlässigkeit der Rauchmelder wird durch die beschriebene Kombination nur dann verbessert, wenn die Ansprechwahrscheinlichkeit der einzelnen Fotozelle größer als 0,5 ist. Für Fotozellen mit einer Zuverlässigkeit von genau 50 % ändert sich durch die Verwendung von drei Fotozellen an Stelle von einer einzelnen nichts, für Ansprechwahrscheinlichkeiten unter 50 % sinkt die Zuverlässigkeit durch die Verwendung mehrerer Fotozellen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Für die Wahrscheinlichkeit $P(p)$ aus Teilaufgabe 2.1 gilt für beliebiges p:

$$\begin{aligned}
P(p) &= \mathrm{B}\,(3; p; 2) + \mathrm{B}\,(3; p; 3) \\
&= \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot q + \binom{3}{3} \cdot p^3 \\
&= 3p^2 \cdot (1-p) + p^3 \\
&= 3p^2 - 3p^3 + p^3 \\
&= -2p^3 + 3p^2
\end{aligned}$$

Der Graph von $P(p)$ sollte in das Koordinatensystem im Material eingezeichnet werden:

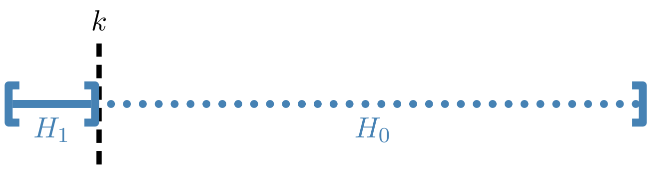


Lösung zu Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

In der Funktion R mit $R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$ wird die Differenz aus der Zuverlässigkeit $P(p)$ eines Rauchmelders mit drei Fotozellen und der Zuverlässigkeit der einzelnen Zelle p berechnet. In der abgebildeten Rechnung wird das p gesucht, für das $R(p)$ maximal wird. Hierfür wird zunächst in Gleichung (1) die erste Ableitung der Funktion R gebildet. In Gleichung (2) wird die Nullstelle der ersten Ableitung bei $p_1 \approx 0{,}78$ berechnet. In Gleichung (3) wird gezeigt, dass die zweite Ableitung an dieser Stelle ein negatives Vorzeichen besitzt, die Funktion $R(p)$ besitzt also bei $p_1 \approx 0{,}78$ ein Maximum.
Werden in einem Rauchmelder drei Fotozellen mit einer einzelnen Zuverlässigkeit von $p_1 \approx 0{,}78$ verbaut, dann ist die Steigerung der Zuverlässigkeit des Gesamtsystems im Vergleich zur einzelnen Fotozelle maximal.

Lösung zu Teilaufgabe 3 (8 BE)

Abschließend soll hier noch ein Hypothesentest entwickelt werden: Durch die Verlagerung des Produktionsstandortes steigt die Ausschussquote der produzierten Fotozellen zunächst von $p_{\text{alt}} = 0{,}03$ um ein Drittel auf $p_{\text{neu}} = 0{,}04$ an. Durch Verbesserungsmaßnahmen von Seiten des Produktionsleiters soll diese Ausschussquote jetzt wieder gesenkt werden.
Um die Wirksamkeit dieser Maßnahmen zu überprüfen, untersucht der Produktionsleiter 850 Rauchmelder auf ihre Funktionstüchtigkeit. Er prüft dabei die Nullhypothese H_0, dass sich der Ausschussanteil nicht verändert hat und unverändert bei $p_0 = 0{,}04$ liegt gegen die Alternativhypothese, dass durch seine Änderungsmaßnahmen die Ausschussquote auf $p_1 < 0{,}04$ gesunken ist.
Für eine Anzahl X von defekten Fotozellen in der Stichprobe, die maximal einer festgelegten Grenze k entspricht, entscheidet sich der Produktionsleiter für die Alternativhypothese, für $X > k$ entscheidet er sich für die Nullhypothese:



Unterscheide:

$X \leq k$

$$\Rightarrow z = \frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}$$

$X < k$

$$\Rightarrow z = \frac{k - \mu - 0{,}5}{\sigma}$$

k soll jetzt so festgelegt werden, dass der Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt. Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese zwar wahr ist, aber abgelehnt wird. Im konkreten Fall bedeutet das, dass $X \leq k$ gilt, obwohl eine Ausschusswahrscheinlichkeit von 0,04 zu Grunde liegt:

$$P_{0{,}04}\left(X \leq k\right) = \mathrm{F}\left(850; 0{,}04; k\right) \leq 0{,}05$$

Wegen $\sqrt{850 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 5{,}7 > 3$ kann der Zusammenhang durch die Standardnormalverteilung angenähert werden. Aus der Tabelle kann für $\Phi(z) \leq 0{,}05$ $z \leq -1{,}6449$ abgelesen werden. Mit $z = \frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}$ folgt daraus $k \leq 24$. Die Verbesserungsmaßnahmen des Produktionsleiters werden also dann als erfolgreich angesehen, wenn unter den 850 Rauchmeldern höchstens 24 defekte zu finden sind.

Erläuterung: *Binomial- und Normalverteilung I*

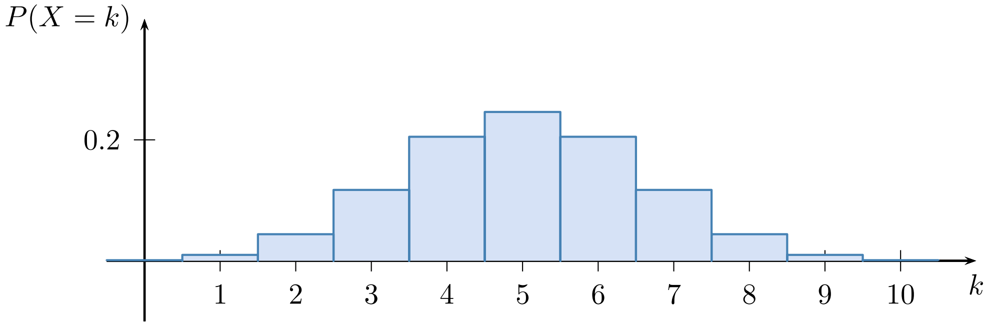
Die Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Bernoulli-Experimentes, also eines Zufallsexperimentes mit genau zwei Ausgängen. Für ein n-stufiges Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Treffer gerade

$$P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{n-k},$$

der Erwartungswert der Verteilung wird über $\mu=n\cdot p$ erhalten, die Standardabweichung über $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$.

Die folgende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n=10$ und $p=0{,}5$:



Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, sie bezieht sich also immer auf eine endliche Menge n. Jedem $k<n$ wird eine feste Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ zugeordnet, eine Wahrscheinlichkeit $P\left(a\leq X\leq b\right)$ wird durch

$$P\left(a\leq X\leq b\right)=\sum_{x=a}^{b}\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot\left(1-p\right)^{n-x}$$

berechnet, dabei werden die Flächeninhalte der einzelnen Streifen des Histogramms aufsummiert.

Erläuterung: *Binomial- und Normalverteilung II*

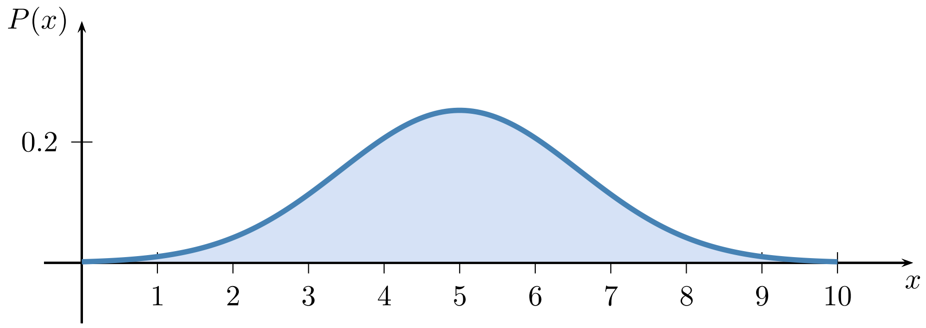
Die Normalverteilung

Im Gegensatz zur Binomialverteilung handelt es sich bei der Normalverteilung um eine kontinuierliche Verteilung. Sie erstreckt sich über eine unendliche Menge, jedem Punkt der Menge wird die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet. Der Graph der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

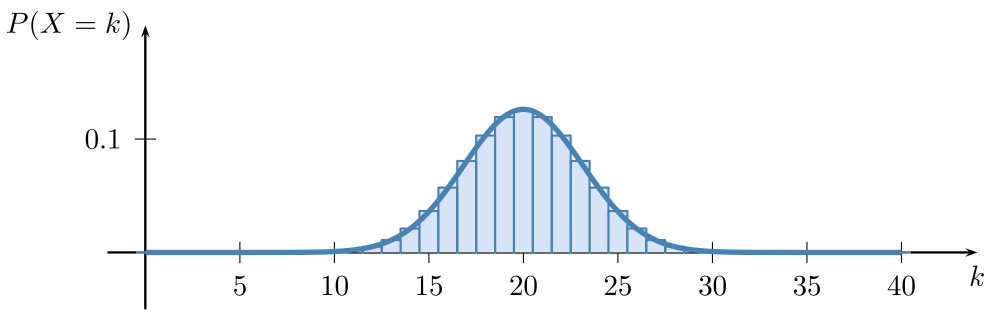
wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet.

Die folgende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer normalverteilten Zufallsgröße mit $\mu = 5$ und $\sigma = 1{,}58$.



Für $n \to \infty$ konvertiert die Binomialverteilung gegen die Normalverteilung. Für einen genügend großen Stichprobenumfang kann daher die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden.
Als Kriterium für die Anwendbarkeit der Näherung gibt es den Satz von Moivre-Laplace: Gilt $\sqrt{np(1-p)} > 3$, so kann die Normalverteilung als Näherung verwendet werden.

Der folgende Graph zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße mit $n = 40$ und $p = 0{,}5$. Wegen $\sqrt{40 \cdot 0{,}5^2} = 10$ kann die Verteilung durch die entsprechende Normalverteilung angenähert werden:

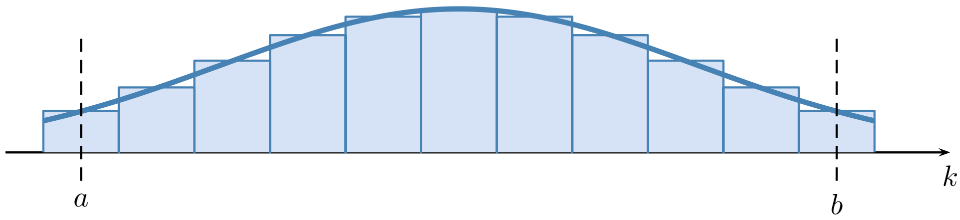


Erläuterung: *Binomial- und Normalverteilung III*

Die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ kann jetzt durch das Integral der Gauß-Kurve angenähert werden:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$$

Dabei muss weiter berücksichtigt werden, dass die Verwendung der Grenzen a und b im Integral verglichen mit den Streifen im Histogramm der Binomialverteilung nicht die vollständige Fläche berücksichtigen:



In den Integralgrenzen muss also die Hälfte der Breite der Streifen, also 0,5, addiert bzw. subtrahiert werden, je nach dem ob es sich um die obere oder die untere Grenze handelt:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} f(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{F(b+0{,}5)} - \mathrm{F(a-0{,}5)}$$

Um das Integral nicht für jede Verteilung neu berechnen zu müssen, wird die Normalverteilung auf eine Verteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, die sogenannte Standardnormalverteilung, mit

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$$

normiert. Die Verteilungsfunktion dieser Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \int_{\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{dt}$$

ist tabellarisiert und muss daher nicht jedes Mal neu gebildet werden.

Um die Werte der Standardnormalverteilung nutzen zu können, muss lediglich die Zufallsgröße der Binomialverteilung normiert werden. Der Erwartungswert der normierten Zufallsgröße soll bei $\mu = 0$ liegen, dies wird durch die Subtraktion von $\mu = n \cdot p$ realisiert. Die Division durch $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ normiert die Standardabweichung auf 1:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu+0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0{,}5}{\sigma}\right)$$