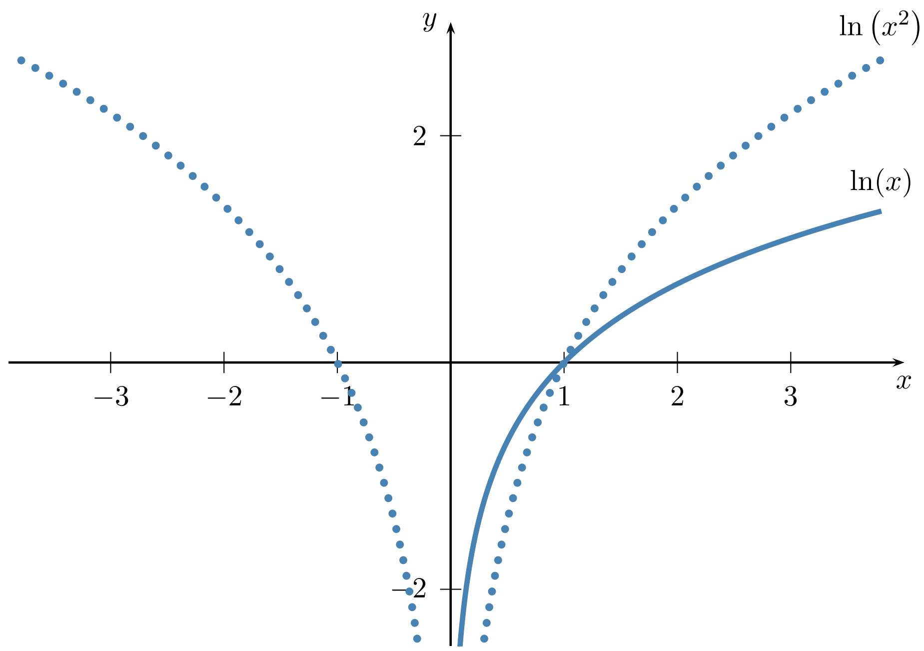
Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Zunächst sollten die Graphen von $\ln(x)$ und $\ln\left(x^2\right)$ qualitativ korrekt in ein gemeinsames Koordinatensystem skizziert werden. Der natürliche Logarithmus ist für $x > 0$ definiert, hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und ist streng monoton steigend. Die y-Achse ist senkrechte Asymptote.

Für $\ln\left(x^2\right)$ ändert sich wegen $x^2 \geq 0$ die Definitionsmenge zu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, der Graph verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse. Wegen $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$ ist der Graph von $\ln\left(x^2\right)$ im Vergleich zu $\ln(x)$ um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt:



Beim „qualitativ korrekten“ Skizzieren geht es nicht darum, eine Wertetabelle mit möglichst vielen Werten zu erstellen und säuberlich nachzuzeichnen, sondern darum, die markanten Eigenschaften des Graphen (ohne Taschenrechner) zu kennen und so den prinzipiellen Verlauf zeigen zu können.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (2 BE)

Hier sollten die Werte des Parameters a bestimmt werden, für die $\ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ defininiert ist. Da eine Division durch 0 nicht erlaubt ist, muss $a \neq 0$ gelten. Wegen $x^2 > 0$ muss a außerdem positiv sein, damit das Argument des Logarithmus positiv ist. Es muss also $a > 0$ gelten, damit der Ausdruck definiert ist.

Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (2 BE)

Der Graph einer Funktion verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt. Die Voraussetzung für Punktsymmetrie zum Ursprung ist die Gültigkeit der Beziehung $f(-x) = -f(x)$.

Sei g eine Funktion, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft, dann gilt

$$g(-x) = g(x).$$

Für die Funktion $h(x) = x \cdot g(x)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x) \cdot g(-x) \\ &= -x \cdot g(x) \\ &= -\left(x \cdot g(x)\right) \\ &= -h(x), \end{aligned}$$

der Graph von h verläuft also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Lösung zu Teilaufgabe 1.4 (3 BE)

Wegen $\ln\left(x^2\right) = 2 \cdot \ln\left(|x|\right)$ ist mit $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \ln\left(|x|\right)\right) = 0$ auch

$\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) = 0.$

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Die Abbildung im Material zeigt einige Graphen der Funktionsschar

$$f_a(x) = \begin{cases} x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Die jeweiligen Werte des Scharparameters a sollen bestimmt werden.

Wegen

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) = 0$$

lässt sich der Wert von a aus den Nullstellen der abgebildeten Funktion bestimmen.

Wegen $\ln(1) = 0$ liegen die von 0 verschiedenen Nullstellen der Funktion bei $x = \pm\sqrt{a}$, es sind also die Graphen der Kurvenschar für die Parameterwerte $a = 1$, $a = 4$ und $a = 9$ abgebildet.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Zunächst soll der Parameterwert gefunden werden, für den der Graph der Kurvenschar durch den Punkt E(1 | 1) verläuft:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= 1 \\ 1 &= 1 \cdot \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ 1 &= \ln(1) - \ln(a) \\ -1 &= \ln(a) \\ a &= \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Der Graph von $f_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ verläuft also durch den Punkt E(1 | 1).

Für einen beliebigen Punkt P(p | q) ist

$$\begin{aligned} f_a(p) &= q \\ q &= p \cdot \ln\left(\frac{p^2}{a}\right) \\ \frac{q}{p} &= \ln\left(\frac{p^2}{a}\right) \\ \mathrm{e}^{\frac{q}{p}} &= \frac{p^2}{a} \\ a &= \frac{p^2}{\mathrm{e}^{\frac{p}{q}}} = p^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung $f_a(p) = q$ ist also eindeutig, es gibt genau einen Scharparameter a, für den der zugehörige Graph durch den Punkt P(p | q) geht.

Logarithmengesetze:

$$\begin{aligned} &\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v) \\ &\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v) \\ &\ln(u^v) = v \cdot \ln(u) \end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.3 (10 BE)

Die möglichen Extremstellen einer Funktion findet man durch die Nullstellen der ersten Ableitung. Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft, kann bei $x = 0$ keine Extremstelle vorliegen, es reicht also aus, die Funktion für $x \neq 0$ zu untersuchen:

$$f_a(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$$
$$f_a'(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + x \cdot \frac{2x}{a} \cdot \frac{a}{x^2} = \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2$$

$$0 = \ln\left(\frac{x^2}{a}\right) + 2$$
$$\mathrm{e}^{-2} = \frac{x^2}{a}$$
$$\frac{a}{\mathrm{e}^2} = x^2$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}$$

Negative/gebrochene Exponenten in Gleichungen immer in Brüche/Wurzeln umschreiben!

Wegen $a > 0$ hat die erste Ableitung der Kurvenschar immer genau zwei Nullstellen. Wegen $f_a''(x) = \frac{2x}{a} \cdot \frac{a}{x^2} = \frac{2}{x} \neq 0$ ist auch das hinreichende Kriterium für Extremstellen immer erfüllt, es liegen also immer genau zwei Extremstellen vor.

Um die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve der Extremstellen angeben zu können, wird die y-Koordinate der Extremstellen benötigt:

$$y_E = \pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{\left(\pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}\right)^2}{a}\right) = \pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}} \cdot \ln\left(\frac{\frac{a}{\mathrm{e}^2}}{a}\right) = \mp\frac{2\sqrt{a}}{\mathrm{e}}$$

Der Scharparameter a wird aus den Koordinaten der Extremstellen eliminiert und die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve gebildet:

$$x = \pm\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{e}}$$
$$a = (\pm x \cdot \mathrm{e})^2$$
$$y = \mp\frac{2\sqrt{a}}{\mathrm{e}} = \mp\frac{\pm 2x\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = -2x$$

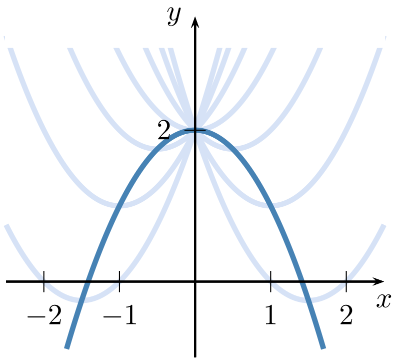
Die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve der Extremstellen lautet $o(x) = -2x$, sie ist für $x \neq 0$ definiert, bei $x = 0$ liegt keine Extremstelle vor.

Erläuterung: *Ortskurven*

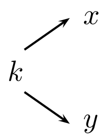
Die Zuordnungsvorschrift einer Kurvenschar enthält neben der Variablen noch einen Parameter, den sogenannten Scharparameter. Für jeden Wert des Scharparameters ergibt sich eine andere Zuordnungsvorschrift und damit ein anderer Funktionsgraph.

In den meisten Fällen haben alle Graphen einer Funktionsschar einen ähnlichen Verlauf, die Extrem- und Wendestellen können als Funktion des Scharparameters bestimmt werden. Die Extrem- oder Wendestellen einer Kurvenschar können selbst wieder auf einer Kurve liegen:

Die Abbildung rechts zeigt in hellblau einige Repräsentanten der Schar $f_k(x) = x^2 - kx + 2$. Außerdem ist zu sehen, dass alle Tiefpunkte der Schar bei $\text{TP}\big(0{,}5k \mid -0{,}25k^2 + 2\big)$ auf einer weiteren, dunkelblau eingezeichneten, Kurve liegen. Diese Kurve wird als Ortskurve der Tiefpunkte bezeichnet. Um sie einzuzeichnen, ist es grundsätzlich möglich, über die Koordinaten der Tiefpunkte einzelne Punkte zu berechnen:



Für jeden Wert von k wird entsprechend eine x- und eine y-Koordinate berechnet:



Dieses Verfahren ist mühsam, jeder Punkt auf der Kurve muss einzeln berechnet werden, insbesondere ist ein automatisiertes Zeichen mit Hilfe eines Computers o.ä. nicht möglich.

Ziel der Berechnung von Ortskurven ist es daher, eine Zuordnungsvorschrift zu finden, die wie gewohnt funktioniert: Zu einem vorgegebenen x wird ein y berechnet.

Hierfür wird in einem ersten Schritt durch Umformen der x-Koordinate der Wert des Scharparameters als Funktion von x bestimmt und anschließend dieser Zusammenhang in die y-Koordinate eingesetzt. Für das konkrete Beispiel hier ergibt sich $k = 2x$ und damit $y = -0{,}25 \cdot (2x)^2 + 2 = -x^2 + 2$.

Die Zuordnungsvorschrift der Ortskurve der Tiefpunkte lautet also $g(x) = -x^2 + 2$.

Lösung zu Teilaufgabe 2.4 (7 BE)

Es soll der Inhalt der Fläche berechnet werden, den der Graph f_9 mit der x-Achse einschließt. Aufgrund der Punktsymmetrie des Funktionsgraphen reicht es aus, die Fläche im II. Quadranten zu berechnen und anschließend mit 2 zu multiplizieren.

Der Graph von f_9 schneidet bei $x = -3$ die x-Achse. Für die rechte Grenze bei $x = 0$ ist die Funktion $x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{a}\right)$ nicht definiert, es muss also zunächst die Fläche bis zu einer rechten Grenze u berechnet und anschließend der Grenzwert gebildet werden:

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \lim_{u \to 0} \int_{-3}^{u} x \cdot \ln\left(\frac{x^2}{9}\right) \,\mathrm{dx} \\
&= 2 \cdot \lim_{u \to 0} \left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(\frac{x^2}{9}\right) - \frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{u} \\
&= 2 \cdot \lim_{u \to 0} \Bigg[\left(\frac{1}{2}u^2 \ln\left(\frac{u^2}{9}\right) - \frac{1}{2}u^2\right) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 \cdot \ln\left(\frac{(-3)^2}{9}\right) - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2\right)\Bigg] \\
&= 2 \cdot \lim_{u \to 0} \left[\left(\frac{1}{2}u^2 \ln\left(\frac{u^2}{9}\right) - \frac{1}{2}u^2\right) + 4{,}5\right] \\
&= 9 + 2 \cdot \lim_{u \to 0} \left(\frac{1}{2}u^2 \left(\ln\left(u^2\right) - \ln(9)\right) - \frac{1}{2}u^2\right) \\
&= 9 + 2 \cdot \lim_{u \to 0} \left(\frac{1}{2}\cancelto{0}{u} \cdot \cancelto{0}{u \cdot \ln\left(u^2\right)} - \cancelto{0}{\frac{1}{2}u^2 \cdot \ln(9)} - \cancelto{0}{\frac{1}{2}u^2}\right) \\
&= 9
\end{aligned}
$$

Bei der Grenzwertberechnung wurde der Zusammenhang aus Teilaufgabe 1.4 verwendet. Der Graph von f_9 schließt mit der x-Achse eine Fläche von 9 FE ein.