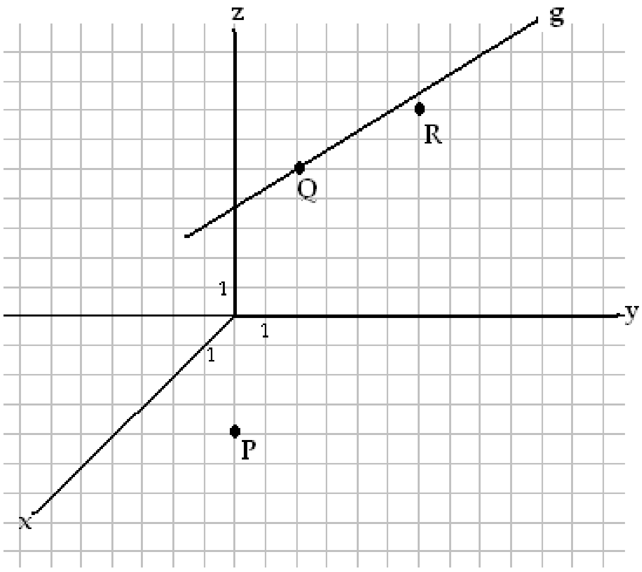
Hessen-2007-Geometrie-B2-GK

Punkte P(1|2|-2); Q(0|2|4) und R(-1|5|6)



Geraden $g:\bar{x}=\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}$ und

$h:\bar{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\b\\6\end{pmatrix}$

a. Zu zeigen ist, dass es genau ein s gibt, das das GLS $\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}$ löst. Man erkennt, das s=1 alle 3 Gleichungen löst!!

b.

- Wir setzen die Geraden gleich

$$\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{rl}2s+3t&=4\\-6s+6t&=-12\\-4s-6t&=-8\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rl}2s+3t&=4\\-6s+6t&=-12\\-10s&=-20\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rl}t&=0\\s&=2\end{array}$$

  also gibt es einen Schnittpunkt S(2|-4|0)

- Für b=9 sind die Geraden zueinander parallel, denn die Richtungsvektoren linear abhängig, weil $-1{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix}$. Wenn sie sogar identisch sein sollen, dann muss es ein a geben, sodass $\begin{pmatrix}-2\\8\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\a\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\6\end{pmatrix}$ lösbar ist: $\begin{array}{rl}2s+3t&=4\\-6s+9t&=-12\\-4s-6t&=a-8\end{array}$

$$\begin{array}{rl}2s+3t&=4\\18t&=0\\-4s-6t&=a-8\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rl}s&=2\\t&=0\\-4s-6t&=a-8\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rl}s&=2\\t&=0\\0&=a\end{array}$$

- Zusammenfassung:
  - Für a=0;b=-6 haben die Geraden einen Schnittpunkt
  - Für b=9 sind die Geraden parallel zueinander , für a=0 sogar identisch
  - Für alle anderen Setzungen von a und b sind die Geraden windschief

c.

1. Aus I. folgt, dass D=(-2+2s|8-6s|8-4s) ein Punkt der Geraden g ist, weil $g:\bar{x}=\bar{d}$ ist, und zwar derjenige, für den $\overline{PD}\perp g$ steht (II.)
2. $\overline{DP}*\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+2s\\6-6s\\10-4s\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\-6\\-4\end{pmatrix}=-8+4s-36+36s-40+16s=0$ ➔s=1,5➔D(1|-1|2)

3. Es soll wohl die Fläche des Dreiecks PQR berechnet werden mit der Höhe |PD| und der Grundseite |QR|, ist aber nicht korrekt, weil R nicht auf der Geraden g liegt!!
   Die Rechnung stimmt:
   $$A = \frac{1}{2} \cdot |PD| \cdot |QR| = \frac{1}{2}\sqrt{1 \quad + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26} \cdot \sqrt{14} \approx 9{,}54$$