Hessen-2007-Inifitesimalrechnung-A1-LK

Gegeben $f_a(t) = \frac{a+\ln(t)}{t^2}; a \in R$

a. $f_a'(t) = \frac{\frac{1}{t}\cdot t^2 - 2t(a+\ln(t))}{t^4} = \frac{1-2a-2\ln(t)}{t^3}$ ➔

$$f_a''(t) = \frac{-\frac{2}{t}t^3 - 3t^2(1-2a-2\ln(t))}{t^6} = \frac{-2-3(1-2a-2\ln(t))}{t^4} = \frac{-5+6a+6\ln(t)}{t^4}$$

b. $\int f_a(t)dt = \int \frac{a+\ln(t)}{t^2}dt = \int \frac{a}{t^2}dt + \int \frac{\ln(t)}{t^2}dt = -\frac{a}{t} - \frac{1+\ln(t)}{t} + C = \frac{-a-1-\ln(t)}{t} + C$, denn durch partielle Integration erhält man:

$\int \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \int \ln(t)\cdot\frac{1}{t^2}\,dt = -\ln(t)\cdot\frac{1}{t} - \int(-\frac{1}{t})\cdot\frac{1}{t}\,dt = -\ln(t)\cdot\frac{1}{t} - \frac{1}{t} = \frac{-\ln(t)-1}{t}$ mit

$u = \ln(t) \Rightarrow u' = \frac{1}{t}$ und $v = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{t}$

c. <u>Kurvendiskussion</u>

- $D(f_a) =]0;\infty[$
- $f_a(t) = 0 \Rightarrow \frac{a+\ln(t)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = -a \Leftrightarrow \underline{t = e^{-a}}$ ist einzige Nullstelle
- $f_a'(t) = 0 \Rightarrow 1-2a-2\ln(t) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(t) = 1-2a \Leftrightarrow \ln(t) = 0{,}5-a \Leftrightarrow \underline{t = e^{0{,}5-a}}$ ist mögliches Extremum. Da $f_a''(e^{0{,}5-a}) = \frac{-5+6a+6(0{,}5-a)}{e^{2-4a}} = \frac{-2}{e^{2-4a}} < 0$ existiert ein Maximum $\underline{H\left(e^{0{,}5-a} \mid \frac{a+0{,}5-a}{e^{1-2a}}\right) = \left(e^{0{,}5-a} \mid 0{,}5e^{2a-1}\right)}$
- $f_a''(t) = 0 \Rightarrow -5+6a+6\ln(t) = 0 \Leftrightarrow 6\ln(t) = 5-6a \Leftrightarrow \ln(t) = \frac{5-6a}{6} = \frac{5}{6}-a \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \underline{t = e^{\frac{5}{6}-a}}$, also $\underline{W\left(e^{\frac{5}{6}-a} \mid \frac{a+\frac{5}{6}-a}{e^{\frac{5}{3}-2a}}\right) = \left(e^{0{,}5-a} \mid \frac{5}{6}5e^{2a-\frac{5}{3}}\right)}$

d. $g(t) = f_2(t+e^{-2}) = \frac{2+\ln(t+e^{-2})}{(t+e^{-2})^2}$ beschreibt den Luftstrom (Liter/s) beim Ausatmen.

d.1. Der Luftstrom steigt stark an, er erreicht nach 0,087s =0,223 s (Extremstelle von f_2) $-e^{-2}$ s das Maximum von $0{,}5e^{2a-1} \approx 10 Liter/s$, um dann immer weniger stark abzufallen

d.2. Die stärke Abnahme ist an der Stelle, an der die Änderungsrate g'(t)= f_2'(t) ihr Minimum hat, also an der (Wende)Stelle g''(t)= f_2''(t)=0, d.h. bei $t = e^{\frac{5}{6}-2} - e^{-2} \approx 0{,}17$

d.3 Wir berechnen die Volumina $V(1) = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f_2(t+e^{-2})dt =$

$$=\left[\frac{-2-1-\ln(t+e^{-2})}{t+e^{-2}}\right]_0^1=\frac{-3-\ln(1+e^{-2})}{1+e^{-2}}-\frac{-3-\ln(e^{-2})}{e^{-2}}$$ =-2,754+7,389=4,6348

und $V(\infty)=\int_0^\infty g(t)dt=\int_0^\infty f_2(t+e^{-2})dt=$

$$\left[\frac{-2-1-\ln(t+e^{-2})}{t+e^{-2}}\right]_0^\infty=\frac{-3-\ln(\infty+e^{-2})}{\infty+e^{-2}}-\frac{-3-\ln(e^{-2})}{e^{-2}}=$$ 0-7,389=7,389

Also ist $\frac{V(1)}{V(\infty)}=\frac{4,6348}{7,389}\approx 62,72\%$ <75%