



Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1 (8 BE)

Die Voraussetzungen dafür, dass ein Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette aufgefasst werden kann, sind zum einen, dass es nur zwei Ausgänge des Experimentes gibt und zum anderen, dass sich Treffer- und Nietenwahrscheinlichkeit im Verlauf des Experimentes nicht ändern. Da Peter sich nur für Sammelbilder von Spielern der deutschen Nationalmannschaft interessiert, sind Bilder von Spielern sämtlicher anderer Nationen gleich als Nieten zu behandeln, so dass es in diesem Experiment tatsächlich nur zwei Ausgänge gibt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Tafel Schokolade das Bild eines deutschen Nationalspielers enthalten ist, ist für jede gekaufte Tafel gleich, so dass auch diese Voraussetzung erfüllt ist und es sich um eine Bernoulli-Kette handelt.

Die Bernoulli-Kette hat eine Länge von $n = 20$, es ist $p = 0,2$ und damit $q = 1 - p = 0,8$. Damit ist

$$P(A) = \binom{20}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} \approx 0,2182$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - F(20; 0,2; 5) \approx 0,1958 \end{aligned}$$

$$P(C) = 0,2 \cdot 0,8^{19} \approx 0,0029$$

Dabei wurde bei der Berechnung von $P(C)$ die Bedingung „in der letzten geöffneten Packung zum ersten Mal“ umgesetzt, indem der $\binom{n}{k}$ -Term in der Bernoulli-Kette weggelassen wurde. Dieser berücksichtigt die Anzahl der Möglichkeiten die es gibt, k Treffer auf n Versuche zu verteilen. Soll ein Treffer an einer bestimmten Stelle in der Kette erfolgen, fällt diese Variation weg.

Lösung zu Teilaufgabe 2 (5 BE)

Inga möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein Bild eines deutschen Nationalspielers erwerben. Es soll also

$$P(X \geq 1) > 0,99$$

Merke:



Bernoulli-Kette:

- nur zwei Ausgänge
- konstante Wahrscheinlichkeiten

Merke:



- bei Division einer Ungleichung durch eine negative Zahl wird das Ungleichheitszeichen umgedreht
- der Logarithmus einer Zahl zwischen 0 und 1 ist immer negativ

sein. Die Zahl n der Schokoladentafeln, die sie mindestens kaufen muss, um diese Wahrscheinlichkeit zu gewährleisten, soll ermittelt werden.

Aufgaben dieser Art lassen sich über das Gegenereignis berechnen, Gegenereignis von „mindestens ein Treffer“ ist immer „kein Treffer“:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - 0,8^n > 0,99 && | + 0,8^n \\ &1 > 0,99 + 0,8^n && | - 0,99 \\ &0,01 > 0,8^n && | \lg() \\ \lg(0,01) > n \cdot \lg(0,8) &&& | : \lg(0,8) \\ \frac{\lg(0,01)}{\lg(0,8)} &\approx 20,64 < n \end{aligned}$$

Inga müsste also mindestens 21 Tafeln Schokolade kaufen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein Bild eines deutschen Nationalspielers bekommt.

Lösung zu Teilaufgabe 3 (6 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich innerhalb eines Kartons mit 20 Tafeln Schokolade mindestens zwei Bilder deutscher Nationalspieler befinden, beträgt

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(20; 0,2; 1) \approx 0,9308.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 1 - 0,9308 \approx 0,0692$ erhält ein Kunde also keine zwei Bilder deutscher Nationalspieler und bekommt damit eine Auszahlung von 10 €. Für die Filialleiterin bedeutet das, dass sie pro verkaufter Kiste Schokolade mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,9308$ einen Gewinn von 5 € macht, mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0,0692$ macht sie dagegen Verluste in Höhe von 5 €. Für den mittleren Gewinn pro Kiste Schokolade ergibt sich damit:

$$G = 0,9308 \cdot 5 + 0,0692 \cdot (-5) \approx 4,31$$

Während der Werbeaktion sinkt der Gewinn pro verkaufter Kiste Schokolade damit auf etwa 4,31 €.



Lösung zu Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Die Filialleiterin wird den Hersteller verdächtigen, weniger Bilder deutscher Nationalspieler zu verschenken als offiziell angegeben ist, wenn sie unter 100 untersuchten Tafeln Schokolade höchstens 15 solcher Bilder findet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von diesen 100 Tafeln Schokolade maximal 15 ein Bild eines deutschen Nationalspielers enthalten, obwohl sich die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit von $p_0 = 0,2$ nicht geändert hat, ist

$$P_{0,2}(X \leq 15) = F(100; 0,2; 15) \approx 0,1285.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 13 % wird der Hersteller also von der Filialleiterin zu Unrecht verdächtigt.

Lösung zu Teilaufgabe 4.2 (5 BE)

Der Fall, dass die Filialleiterin dem Hersteller fälschlicherweise glaubt, tritt dann ein, wenn sich unter den 100 untersuchten Schokoladentafeln mehr als 15 mit Bild eines deutschen Nationalspielers befinden, obwohl sich die Wahrscheinlichkeit für ein solches Bild verändert hat (also nicht mehr bei $p_0 = 0,2$ liegt).¹

Berechnen lässt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit dann, wenn die alternative Wahrscheinlichkeit $p_1 \neq p_0$ bekannt ist. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Filialleiterin dem Hersteller vertraut (sie also mindestens 16 Bilder deutscher Nationalspieler findet), obwohl er in Wirklichkeit weniger Bilder in seinen Tafeln anbietet:

$$P_{p_1}(X > 15) = 1 - P_{p_1}(X \leq 15) = 1 - F(100; p_1; 15)$$

¹Für die Filialleiterin relevant ist hier nur der Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Bild eines deutschen Nationalspielers unter 20 % gesunken ist.