Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Durch die Funktion

$$f(x) = (x+2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right)$$

wird der Querschnitt eines Wassergrabens beschrieben. Der Verlauf des Graphen ist dem Material zu entnehmen.

Zunächst sollen Breite und Tiefe des Grabens bestimmt werden. Die Breite entspricht dabei gerade dem Abstand der beiden Nullstellen der Funktion, die Tiefe dem Betrag des y-Wertes des Tiefpunktes.

Nullstellen:

$$0 = (x+2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right)$$

$$0 = (x+2) \quad \Rightarrow \; x_1 = -2$$

$$0 = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right) \quad \Rightarrow x_2 = -2; \; x_3 = 4$$

Merke:

„Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist“

$\Rightarrow$ Entspricht die Zuordnungsvorschrift einer Funktion einem Produkt, zum Berechnen der Nullstellen nie ausmultiplizieren, sondern faktorweise Null setzen!

Extremstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right) \\ &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

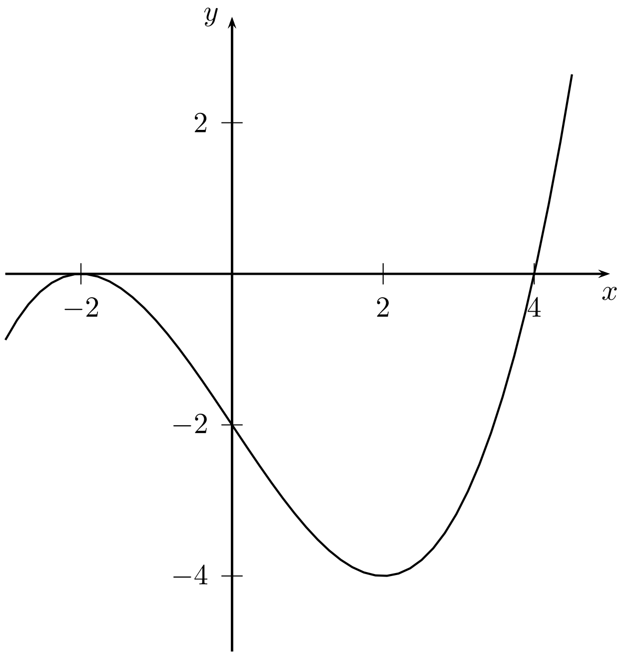
$$f''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \quad \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f(2) = -4$$

Der Wassergraben ist also 6 m breit und 4 m tief. Die Skala wird daher wie folgt sinnvoll beschriftet:



Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Auf der linken Seite soll an den Wassergraben ein horizontales Feld angrenzen. Hier soll gezeigt werden, dass der Graben ohne Knick in das Feld übergeht.

Damit die Graphen von zwei Funktionen knickfrei ineinander über gehen, müssen sie an der Übergangsstelle gleiche Steigungen haben, die Funktionswerte der ersten Ableitung an dieser Stelle müssen also gleich sein.
Der Sachverhalt lässt sich hier gut argumentieren. Die Wiese soll horizontal verlaufen, ihre Steigung beträgt also $m_{\text{Wiese}} = 0$. Die Funktion des Wassergrabens hat an der Übergangsstelle bei $x = -2$ einen Hochpunkt, also gilt auch $m_f = 0$, der Wassergraben schließt also knickfrei an das Feld an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Der Graben grenzt an der rechten Seite bei $x = 4$ an die Umgebung an. Der Schnittwinkel lässt sich über die Steigung in diesem Punkt bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \tan(\alpha) \\ 4{,}5 &= \tan(\alpha) \qquad \Rightarrow \alpha = 77{,}5^\circ \end{aligned}$$

Der Graben trifft also unter einem Winkel von $77{,}5^\circ$ auf das angrenzende Gelände.

Soll das Ergebnis von

$$\alpha = \arctan(m)$$

in Grad angegeben werden, muss der Taschenrechner auf DEG stehen.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

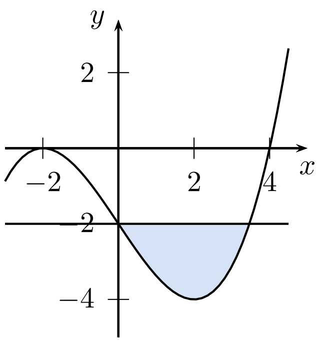
Um das Fassungsvermögen des Grabens (also sein Volumen) zu bestimmen, muss die Querschnittsfläche mit der Länge multipliziert werden. Der Querschnitt lässt sich über das Integral zwischen beiden Nullstellen berechnen.
Da der Graph im betreffenden Bereich unterhalb der x-Achse verläuft, muss der Betrag des Integralwertes bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^{4} \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2\,\mathrm{d}x \right| = \left| \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 2x \right]_{-2}^{4} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{32} \cdot 4^4 - \frac{3}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{32} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \right) \right| \\ &= |-13{,}5| = 13{,}5 \end{aligned}$$

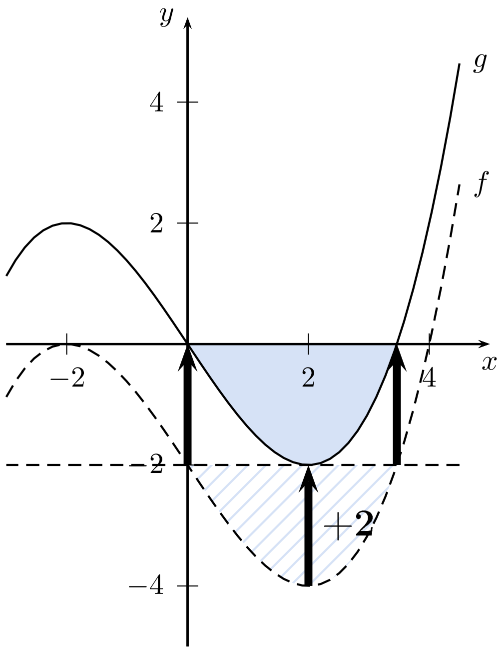
Die Querschnittsfläche beträgt also $13{,}5\,\mathrm{m}^2$, damit ergibt sich für das Fassungsvermögen des Wassergrabens auf einer Länge von $10\,\mathrm{m}$:

$$V = 13{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot 10\,\mathrm{m} = 135\,\mathrm{m}^3$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (8 BE)



Der niedrigste Wasserstand wird durch eine Gerade mit $y = -2$ beschrieben, die Situation ist in der Abbildung links dargestellt.
Um den prozentualen Anteil des niedrigsten Wasserstands am maximalen Füllstand zu bestimmen, muss der Inhalt der eingefärbten Fläche berechnet werden. Die einfachste Methode ist hier ein Verschieben der ursprünglichen Funktion f um 2 nach oben. Die Fläche entspricht dann dem Betrag des Integrals zwischen dem Ursprung und der positiven Nullstelle der verschobenen Funktion g:



Wir bestimmen jetzt also die Nullstellen von $g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$:

$$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}\right)$$
$$x_1 = 0; \quad x_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt kann hier mit Hilfe des Taschenrechners bestimmt werden, da eine Angabe der Stammfunktion nicht erforderlich ist:

$$A_2 = \left| \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \,\mathrm{d}x \right| = \left| \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2\right]_0^{2\sqrt{3}} \right| = 4,5$$

Wegen $4{,}5/13{,}5 \approx 0,33$ ist der Graben minimal zu 33 % gefüllt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

In der abschließenden Teilaufgabe soll die Modellierung des Wasserstandes im Jahresverlauf beschrieben werden. Bekannt ist aus der Aufgabenstellung, dass der Wasserstand sich periodisch ändert und im April sein Maximum, im Oktober dagegen sein Minimum erreicht. Den maximalen Füllstand des Grabens markiert die x-Achse, den minimalen Tiefstand die Gerade mit der Zuordnungsvorschrift $y = -2$. Jetzt sollen die Überlegungen im abgebildeten Kästchen beschrieben werden:

- In Zeile (1) wird die Nomenklatur festgelegt: Eine Einheit auf der x-Achse entspricht jeweils einem Monat, die Achse startet im Ursprung mit dem Januar.
- Der Füllstand des Wassergrabens ändert sich periodisch, so dass sich als Modell eine trigonometrische Funktion anbietet. Hier wird eine Kosinus-Funktion verwendet.
- In (3) werden einige Parameter der Funktion bestimmt:
  - Der durchschnittliche Füllstand des Wassergrabens liegt bei $y = -1$, durch $d = -1$ wird daher die Nulllage der Schwingung um 1 nach unten verschoben.
  - Der maximale Füllstand liegt bei $y = 0$, der minimale bei $y = -2$, die Amplitude der Schwingung beträgt also $a = 1$.
  - Sein Maximum erreicht der Wasserstand im April. Da der April dem x-Wert 3 entspricht, muss die Funktion durch $c = -3$ um 3 nach rechts verschoben werden.
- In Zeile (3) wird schließlich mit b noch der letzte Parameter bestimmt. Das b beeinflusst die Periode der Kosinusschwingung zu $\frac{2\pi}{b}$. Da die Wasserstände sich jährlich wiederholen, beträgt die Periode hier gerade 12 Monate, damit ist $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.
- Abschließend wird die Güte des Modells getestet: Ein maximaler Füllstand im April (3) und ein minimaler Füllstand im Oktober (9) lassen einen durchschnittlichen Füllstand im Juli (6) erwarten. Mit $g(6) = -1$ bestätigt das Modell diese Beobachtung.

> Merke:
>
> Während die Verschiebung eines Funktionsgraphen in y-Richtung intuitiv mit „+“ nach oben und mit „−“ nach unten realisiert wird, widerspricht die Verschiebung in x-Richtung der Intuition: Hier verschiebt das „−“ nach rechts, das „+“ nach links.