Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Die Parameter in $f(x) = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$ sollen so bestimmt werden, dass die Kurve durch die Punkte $\mathrm{P}_1\,(-2{,}53 \mid 0{,}835)$ und $\mathrm{P}_2\,(3{,}57 \mid 0{,}39)$ geht. Da die Anzahl der Parameter und die Anzahl der Bedingungen übereinstimmen, gibt es eine eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{P}_1\,(-2{,}53 \mid 0{,}835): & f\,(-2{,}53) = 0{,}835 & \Leftrightarrow & 0{,}835 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (-2{,}53)^2} & \mathrm{I} \\ \mathrm{P}_2\,(3{,}57 \mid 0{,}39): & f\,(3{,}57) = 0{,}39 & \Leftrightarrow & 0{,}39 = k \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (3{,}57)^2} & \mathrm{II} \end{array}$$

„Potenzen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.“ (2. Potenzgesetz)

Durch Division der beiden Gleichungen lässt sich der Parameter k eliminieren und a berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{0{,}835}{0{,}39} &= \mathrm{e}^{a \cdot \left((-2{,}53)^2 - (3{,}57)^2\right)} \\ 2{,}14 &= \mathrm{e}^{-6{,}344 \cdot a} && \mid \ln \\ -6{,}344 \cdot a &= \ln\,(2{,}14) && \mid : (-6{,}344) \\ a &\approx -0{,}12 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung I oder II $k \approx 1{,}8$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass die betrachtete Funktion ein Maximum bei $x = 0$ besitzt. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. rechnerisch über eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - in der ersten Ableitung:

> Merke:
>
> Um zu untersuchen, ob an einer Nullstelle ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet, wird ein Wert rechts und ein Wert links der Nullstelle in die Funktion eingesetzt und die Vorzeichen vergleichen. Liegen noch weitere Nullstellen vor, muss der ausgewählte Wert näher an der untersuchten Nullstelle liegen als die nächste Nullstelle.

$$f(x) = 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$
$$f'(x) = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$
$$0 = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2} \Leftrightarrow x = 0$$
$$f'(-1) > 0$$
$$f'(+1) < 0$$

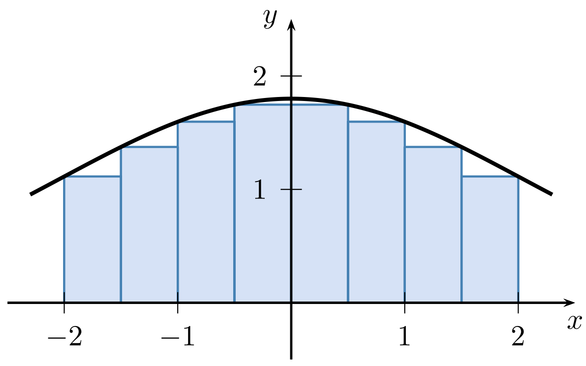
2. Wegen $f(x) = f(-x)$ verläuft der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse, die einzige Extremstelle der Funktion muss auf der Symmetrieachse, also bei $x = 0$ liegen. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ muss ein Maximum vorliegen.

3. Der Exponent der e-Funktion ist wegen $x^2 \geq 0$ entweder Null oder negativ. Da $\mathrm{e}^0 = 1$ und für $a > 0$ $\mathrm{e}^{-a} < 1$ gilt, muss bei $x = 0$ ein Maximum vorliegen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (10 BE)

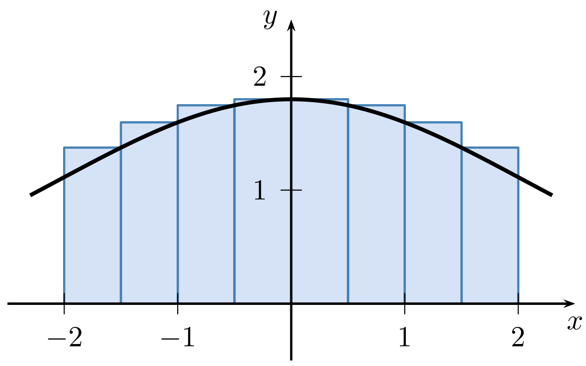
Zur näherungsweisen Berechnung der Fläche unter der betrachteten Kurve kann die Fläche durch Rechtecke angenähert werden. Dabei wird eine untere Schranke für den tatsächlichen Flächeninhalt ermittelt, indem nur Rechtecke betrachtet werden, die von der Kurve nicht geschnitten werden (Untersumme), die Fläche der Rechtecke, die von der Kurve geschnitten werden, wird als Obersumme bezeichnet und legt eine obere Grenze für die tatsächliche Fläche fest.
In der Aufgabe war bereits vorgegeben, dass das Intervall $[-2; 2]$ in 8 Streifen unterteilt werden soll, die Breite der einzelnen Streifen beträgt damit 0,5 m. Die Höhe der Rechtecke ergibt sich aus den entsprechenden Funktionswerten.
Aufgrund der Symmetrie der Funktion reicht es aus, die Streifen im Intervall $[0; 2]$ zu addieren und die berechnete Fläche mit 2 zu multiplizieren.

Untersumme:



$$U_8 = 2 \cdot [0{,}5 \cdot (f\,(0{,}5) + f\,(1) + f\,(1{,}5) + f\,(2))]$$
$$\approx 5{,}8312$$

Obersumme:



$$O_8 = 2 \cdot [0{,}5 \cdot (f\,(0) + f\,(0{,}5) + f\,(1) + f\,(1{,}5))]$$
$$\approx 6{,}5173$$

Für die Fläche unter der Kurve gilt damit $5{,}8312\,\mathrm{m}^2 < A < 6{,}5173\,\mathrm{m}^2$ oder

$$A \approx \frac{5{,}8312 + 6{,}5173}{2}\,\mathrm{m}^2 \approx 6{,}17\,\mathrm{m}^2.$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

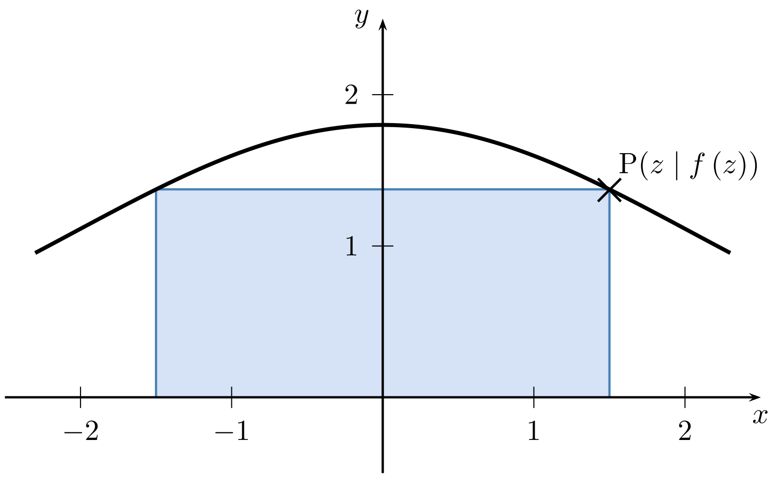
Die prozentuale Abweichung des Wertes aus Teilaufgabe 2.1 von der Computernäherung beträgt

$$\Delta A = 1 - \frac{6{,}17}{6{,}1966} \approx 0,0043 = 0{,}43\,\%.$$

Durch die Methode aus Teilaufgabe 2.1 könnten bessere Näherungswerte erzielt werden, wenn die Anzahl der Rechteckstreifen erhöht wird.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

Hier soll ein alternativer rechteckiger Fenstertyp betrachtet werden. Die durch $f(x) = 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$ gegebene äußere Profillinie des Gaubenfensters aus den vorhergehenden Aufgaben stellt dabei auch hier die äußere Begrenzung des Fensters dar, das Rechteck entsteht also durch das Verschieben eines Punktes $\mathrm{P}(z \mid f(z))$ entlang des Graphen von f:



Dabei gilt für die Breite und Höhe des rechteckigen Fensters

$$b = 2z$$
$$h = f(z) = 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12z^2}$$

und damit für die Querschnittsfläche des Fensters als Funktion von P:

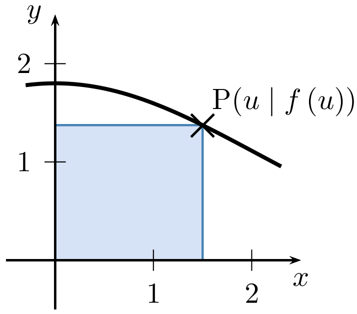
$$A_{\text{Fenster}}(z) = 2z \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12z^2}.$$

Mit der Funktion $A(z) = 2z \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12z^2}$ wird also der Inhalt der Querschnittsfläche des rechteckigen Gaubenfensters für eine variable Breite bestimmt.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (7 BE)

Indem der Punkt P entlang des Funktionsgraphens verschoben wird, ändert sich die Fläche des entsprechenden Rechtecks. Gesucht ist jetzt der Punkt P, für den die Rechteckfläche maximal ist.

Für die Rechnung reicht es aus Symmetriegründen wieder aus, nur eine Hälfte der Dachgaube und damit auch des Fensters zu betrachten:



$$A(z) = 2z \cdot 1,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,12z^2}$$

$$\begin{aligned} A'(z) &= 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot z^2} + u \cdot (-0{,}432z) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot z^2} \\ &= \left(1{,}8 - 0{,}432z^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1{,}8 - 0{,}432z^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot z^2} \\ z &= \pm\sqrt{\frac{1{,}8}{0{,}432}} \approx \pm 2{,}04 \end{aligned}$$

Dem Kontext kann entnommen werden, dass nur die positive Lösung relevant ist. Wegen $A'(0) > 0$ und $A'(3) < 0$ liegt für die Funktion A bei $z \approx 2{,}04$ ein Maximum vor.

Die Fensterfläche beträgt dann wegen $A(2{,}04) = 2 \cdot 2{,}04 \cdot 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot (2{,}04)^2} \approx 4{,}46$ etwa $A = 4{,}46\,\mathrm{m}^2$.