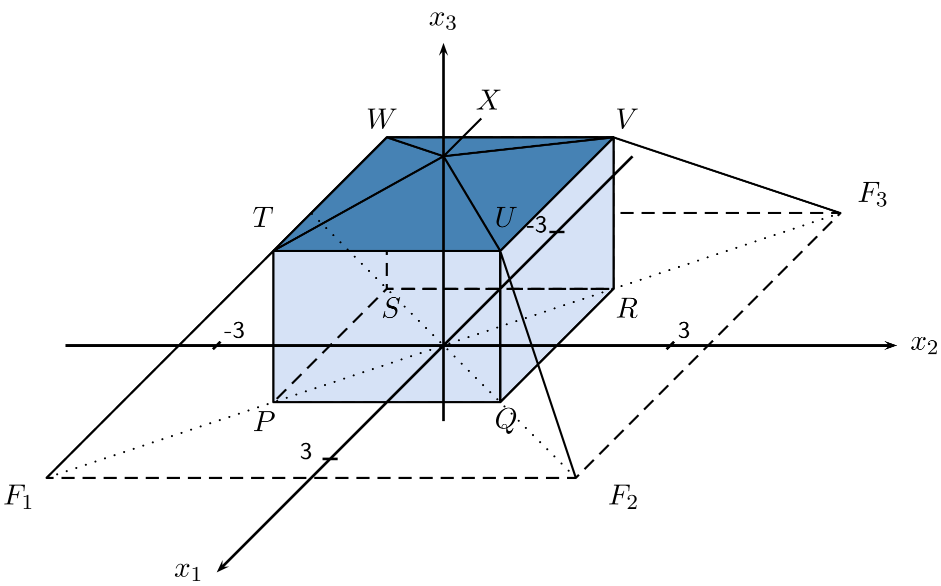
Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1.1



Die gesuchten Punkte haben die Koordinaten $T(1{,}5|-1{,}5|2)$, $U(1{,}5|1{,}5|2)$, $X(0|0|2{,}5)$ und $F_1(3{,}5|-3{,}5|0)$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2

Um den Matrialbedarf für die Erneuerung der Spannschnüre zu berechnen, wird die Gesamtlänge der Spannschnüre benötigt. Da die vier Schnüre alle gleich lang sind, reicht es aus, die Länge einer einzelnen Schnur (z.B. $\left|\overline{F_1T}\right|$) zu berechnen und anschließend mit 4 zu multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1T} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OF_1} \\
&= \begin{pmatrix} 3,5 \\ -3,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} +2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{F_1T}\right| &= \left|\overrightarrow{F_1T}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix}+2\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{(+2)^2+(-2)^2+(-2)^2} \\
&= 2\sqrt{3} \\
l_{\text{Schnur}} &= 4\cdot 2\sqrt{3} \\
&= 8\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

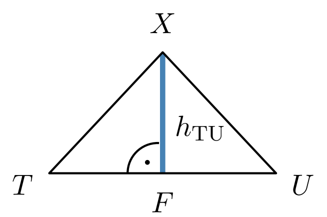
Die Gesamtlänge der Spannschnüre beträgt also $8\sqrt{3}\,\text{m}$ ($\approx 13{,}86\,\text{m}$).

Auch die Dachfläche setzt sich aus vier gleich großen (dreieckigen) Flächen zusammen, so dass es ausreicht, die Fläche eines Dreiecks (z.B. A_{TUX}) zu berechnen und wieder mit 4 zu multiplizieren.

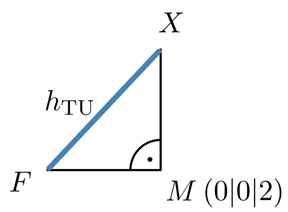
Zur Flächenberechnung gibt es verschiedene Ansätze:

1. Berechnung der Dreiecksfläche über $A_{\text{Dreieck}} = \dfrac{g\cdot h}{2}$:

   Dachfläche von vorn:

   Dachfläche „Querschnitt“:

   - Berechnung der Höhe über den Satz des Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{FX}\right|^2 &= \left|\overline{FM}\right|^2 + \left|\overline{MX}\right|^2 \\
\left|\overline{FX}\right| &= \sqrt{\left|\overline{FM}\right|^2 + \left|\overline{MX}\right|^2} \\
&= \sqrt{1{,}5^2+0{,}5^2} \\
&= \frac{\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}
$$

- Berechnung der Höhe mit Hilfe der Vektorrechnung:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{FX}\right| &= \left|\overrightarrow{FX}\right| \\
&= \left|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OF}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}5^2} \\
&= \frac{\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Inhalt einer einzelnen Dreiecksfläche:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta \mathrm{TUX}} &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{TU}\right| \cdot \left|\overline{FX}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{10}
\end{aligned}$$

2. Berechnung der Dreiecksfläche über das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta \mathrm{TUX}} &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{TU}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FX}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{TU}\right| \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right| \cdot \sin\alpha \quad \text{mit } \alpha = \sphericalangle UTX \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{TU}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right|^2 \cdot \sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{TU}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{TU}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{TU}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right|^2 \cos^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{TU}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{TX}\right|^2 - \left(\overrightarrow{TU} \circ \overrightarrow{TX}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right|^2 \cdot \left|\begin{pmatrix}-1,5\\1,5\\0,5\end{pmatrix}\right|^2 - \left(\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1,5\\1,5\\0,5\end{pmatrix}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3^2 \cdot ((-1{,}5)^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2) - (0 \cdot (-1{,}5) + 3 \cdot 1{,}5 + 0 \cdot 0{,}5)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{42{,}75 - 20{,}25} \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

3. Berechnung der Dreiecksfläche über das Kreuzprodukt:

$$
\begin{aligned}
A_{\Delta \mathrm{TUX}} &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{TU} \times \overrightarrow{TX}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1.5\\-1.5\\0.5\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}3 \cdot 0{,}5 - 0 \cdot (-1{,}5)\\ 0 \cdot (-1{,}5) - 0 \cdot 0{,}5 \\ 0 \cdot (-1{,}5) - 3 \cdot (-1{,}5)\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\4{,}5\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1{,}5^2 + 4{,}5^2} \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

Für die gesamte Dachfläche ergibt sich damit mit $4 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$:

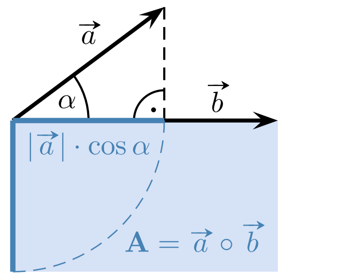
$$A_{\text{gesamt}} = 3\sqrt{10}\,\mathrm{m}^2 \approx 9{,}49\,\mathrm{m}^2.$$

©, Abiturloesung.de

Erläuterung: *Multiplikation von Vektoren*

Es sind zwei Multiplikationen definiert, die zwei Vektoren miteinander verknüpfen:

1. Das Skalarprodukt



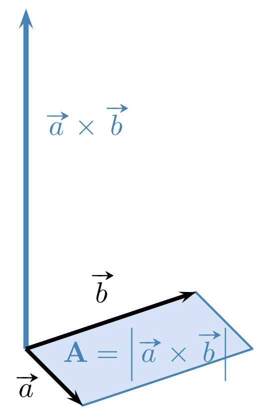
- Das Ergebnis entspricht einem Skalar (="normale Zahl")
- Der Betrag des Ergebnisses entspricht dem Produkt des einen Vektors mit der senkrechten Projektion des anderen Vektors
- Das Vorzeichen des Ergebnisses gibt Aufschluss über die Größe des Winkels zwischen den beiden Vektoren:

  $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$ für $0° < \alpha < 90°$,

  $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$ für $90° < \alpha < 180°$
- Das Skalarprodukt ergibt Null, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen

$$\begin{aligned} A &= \vec{a} \circ \vec{b} \\ \vec{a} \circ \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ \vec{a} \circ \vec{b} &= \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

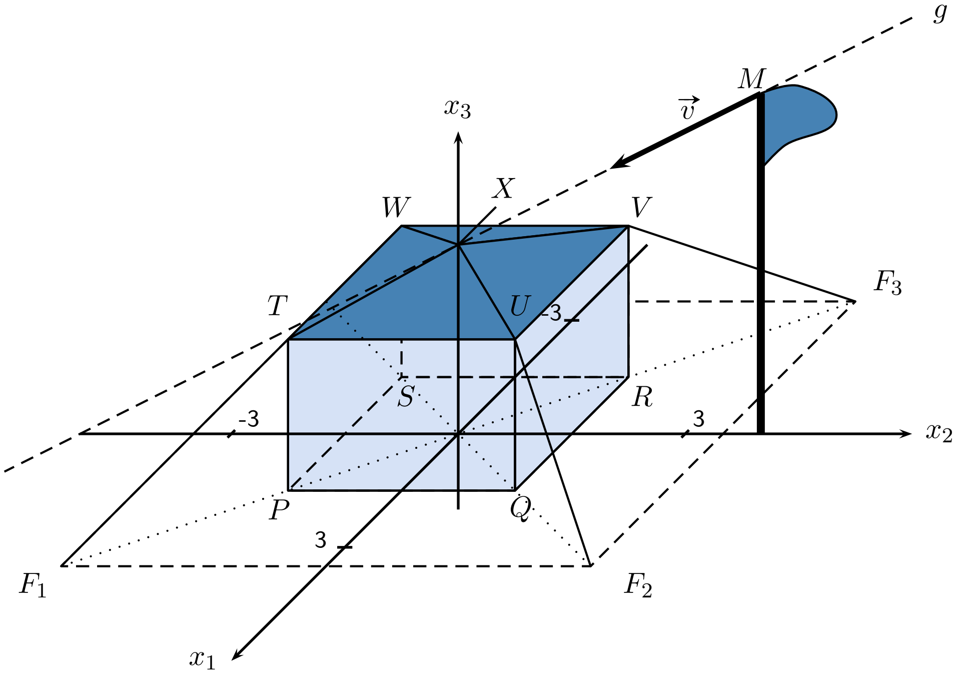
2. Das Kreuzprodukt



- Das Ergebnis entspricht einem Vektor
- Der Ergebnisvektor steht senkrecht auf den beiden ursprünglichen Vektoren
- Die drei Vektoren bilden ein Rechtssystem
- Der Betrag des Ergebnisses entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Teilaufgabe 2.1



Der Verlauf des Schattens der Mastspitze M wird durch eine Gerade beschrieben, die den Punkt M als Aufhängepunkt und den Sonnenstrahlenvektor $\vec{v}$ als Richtungsvektor besitzt:

$$g: \vec{X} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \vec{v}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Um zu überprüfen, ob der Schatten der Mastspitze auf den Punkt X fällt, reicht es, zu überprüfen, ob dieser Punkt auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \; 0 = 0 + 0r \\ \rightarrow \; 0 = 4 - 2r \\ \rightarrow \; 0 = 4 - 2r \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} r = 2$$

Es gibt also einen Wert für r, der alle drei Gleichungen löst, damit liegt der Punkt X auf der Geraden g, der Schatten der Mastspitze M fällt also mit der Spitze des Pavillons X zusammen.

©, Abiturloesung.de

Lösung zu Teilaufgabe 3.1

Die Ebene E wird von den Punkten T, U und X aufgespannt. Wählt man beispielsweise den Punkt X als Aufhängepunkt, ergibt sich für die Parameterform der Ebene:

$$E:\ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{OX} + r \cdot \overrightarrow{XT} + s \cdot \overrightarrow{XU}$$

$$E:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} +1{,}5 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} +1{,}5 \\ +1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Um die Gleichung in Koordinatenform umzurechnen, gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten:

1. Elimination der Parameter:

$$\begin{array}{rcrrrl} x_1 & = & 0 & +1{,}5r & +1{,}5s & \\ x_2 & = & 0 & -1{,}5r & +1{,}5s & \\ x_3 & = & 2{,}5 & -0{,}5r & -0{,}5s & \mid \cdot 3 \\ \hline x_1 + x_2 & = & 0 & & +3s & \\ x_2 - 3x_3 & = & \text{-7,5} & & +3s & \\ \hline x_1 + 3x_3 & = & 7{,}5 & & & \end{array}$$

(Zeilen 1 und 2: $\oplus$; Zeilen 2 und 3: $\ominus$; Zeilen 4 und 5: $\ominus$)

2. Anwenden des Zusammenhangs $\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{OX} \circ \overrightarrow{n}$ mit $\overrightarrow{OX}$: Stützvektor der Ebene und $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der Ebene:

   - Berechnung eines Normalenvektors der Ebene mit Hilfe des Skalarproduktes ($\overrightarrow{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene, also müssen die beiden Skalarprodukte Null ergeben):

$$\begin{pmatrix} +1{,}5 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Big\}\ 1{,}5n_1 - 1{,}5n_2 - 0{,}5n_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} +1{,}5 \\ +1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Big\}\ 1{,}5n_1 + 1{,}5n_2 - 0{,}5n_3 = 0$$

   Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man den Zusammenhang $3n_1 = n_3$.

Diese Gleichung wird von unendlich vielen Koordinaten n_1 und n_3 erfüllt. Da der Normalenvektor einer Ebene lediglich über seine Richtung, nicht aber über seine Länge definiert ist, erhält man an dieser Stelle immer eine Gleichung, die nicht eindeutig lösbar ist. Hier wird ein Parameter frei gewählt, die beiden anderen lassen sich dann daraus berechnen (so ist die Richtung festgelegt, die Länge wird durch den Wert des ersten Parameters bestimmt).

So ergibt sich beispielsweise mit $n_1 = 1$:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ n_3 &= 3n_1 = 3 \\ n_2 &= -n_1 + \tfrac{1}{3}n_3 = 0 \end{aligned}\right\} \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Berechnung eines Normalenvektors mit Hilfe des Kreuzproduktes:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1{,}5 \cdot (-0{,}5) - (-0{,}5) \cdot 1{,}5 \\ -0{,}5 \cdot 1{,}5 - 1{,}5 \cdot (-0{,}5) \\ 1{,}5 \cdot 1{,}5 - (-1{,}5) \cdot 1{,}5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als (mögliche) Koordinatenform der Ebene E:

$$\begin{aligned} \vec{X} \circ \vec{n} &= \overrightarrow{OX} \circ \vec{n} \\ \vec{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x_1 + 3x_3 &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man jeweils die als Kontrollergebnis angegebene Koordinatenform der Ebene E: $x_1 + 3x_3 + 7{,}5 = 0$.

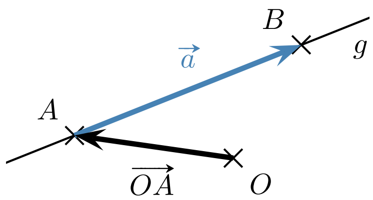
©, Abiturloesung.de

Erläuterung: *Darstellungsformen von Geraden und Ebenen I*

Parameterform

1. Geraden

   Sind zwei Punkte A und B vorgegeben, gibt es nur eine einzige Gerade, die durch diese beiden Punkte verläuft. Geraden werden daher eindeutig durch die Angabe von zwei Punkten (oder alternativ eines Punktes und einer Richtung) beschrieben:

   Aufhängepunkt A
   mit Stützvektor $\overrightarrow{OA}$

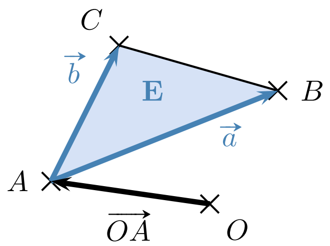
   Richtungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

   $$g: \ \vec{X} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{a}; \ r \in \mathbb{R}$$

   Alternativ könnte auch der Punkt B als Aufhängepunkt gewählt werden.

2. Ebenen

   Ebenen werden durch drei Punkt A, B und C eindeutig beschrieben:

   Aufhängepunkt A
   mit Stützvektor $\overrightarrow{OA}$

   Richtungsvektoren
   $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

   $$E: \ \vec{X} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}; \ r, s \in \mathbb{R}$$

   Auch hier könnte wieder einer der beiden anderen Punkte als Aufhängepunkt gewählt werden.

Dadurch, dass man sowohl für die Parameterdarstellung der Ebene, als auch für die der Geraden viele Möglichkeiten hat, Aufhängepunkte und Richtungsvektoren auszusuchen, gibt es für jede Gerade/Ebene unendlich viele verschiedene Darstellungsformen. Man sieht zwei Darstellungen von Geraden/Ebenen nicht immer direkt an, dass sie die gleiche Gerade/Ebene beschreiben.

Erläuterung: *Darstellungsformen von Geraden und Ebenen II*

Koordinatenform

Die Darstellung von Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) war schon lange vor dem Thema Vektorrechnung aus der Analysis bekannt. Die Gleichung $y = mx + b$ wird von jedem Punkt $(x_0|y_0)$ erfüllt, der auf der Geraden mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt b liegt. Mit Hilfe dieser Darstellungsform ließen sich Schnittpunkte etc. leicht berechnen.

Analog zur Koordinatenform der Geraden im $\mathbb{R}^2$ gibt es auch für Ebenen im $\mathbb{R}^3$ eine parameterfreie Darstellung, also eine einzelne Gleichung, die für alle Punkte $(x_0|y_0|z_0)$, die auf der Ebene liegen, erfüllt wird. Die Koordinatenform erleichtert viele Rechnungen wie beispielsweise das Finden von Schnittpunkten oder -geraden enorm.

Eine Ebene in Koordinatenform wird durch eine einzelne Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

beschrieben.

Man erhält diese Gleichung durch Multiplikation der Parameterform der Ebene mit einem Normalenvektor:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{a} + s \cdot \overrightarrow{b} \;\mid\; \circ\, \overrightarrow{n} \\
\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{n} + r \cdot \underbrace{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{n}}_{=0 \text{ weil } \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{a}} + s \cdot \underbrace{\overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{n}}_{=0 \text{ weil } \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{b}} \\
\overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{n} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 &= d
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Koordinaten x_i entsprechen also den Koordinaten des Normalenvektors der Ebene, das Absolutglied d entspricht dem Skalarprodukt des Normalenvektors mit dem Stützvektor.

Für eine Ebene E mit Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und Aufhängepunkt A wird also die Koordinatenform durch

$$E:\; \overrightarrow{X} \circ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{n}$$

bestimmt.

Alternativ gibt es die Möglichkeit, die Koordinatenform der Ebene aus der Parameterform abzuleiten, indem die Parameter r und s aus der Parameterform eliminiert werden (Umformen des linearen Gleichungssystems). Die Methode mit dem Normalenvektor geht aber schneller und ist weniger fehleranfällig, vor allem wenn der Normalenvektor über das Kreuzprodukt bestimmt wird.

Lösung zu Teilaufgabe 3.2

In dem Kästchen werden die Koordinaten der Spitze eines Stützpfeilers für das beschriebene Vordach berechnet:

- Gleichung (A) beschreibt eine Gerade, die vom Punkt $S(2|1{,}5|0)$ aus senkrecht nach oben (in x_3-Richtung) zeigt. Der Punkt S liegt wie gefordert in einem Abstand von 0,5 m vor dem Punkt Q und stellt den Ankerpunkt des Stützpfeilers dar.
- In Gleichung (B) wird die Geradengleichung der Geraden g aus (A) in die Koordinatenform der Ebene E eingesetzt, um den Schnittpunkt der Geraden durch S mit der Ebene (also der „Verlängerung" der Dachfläche TUX) zu berechnen. Da das Vordach knickfrei an die Dachkante $\overline{TU}$ anschließen soll, muss die Spitze des Stützpfeilers auf der Ebene liegen, die auch die Dachfläche enthält.
- In (C) wurde die Gleichung aus (B) nach r umgeformt, um den Wert des Parameters zu bestimmen, der eingesetzt in Gleichung (A) die Koordinaten der Pfeilerspitze U' ergibt.

Die Spitze U' des Stützpfeilers liegt 1,83 m oberhalb des Ankerpunktes S, die Länge der vertikalen Stützstange entspricht also 1,83 m.