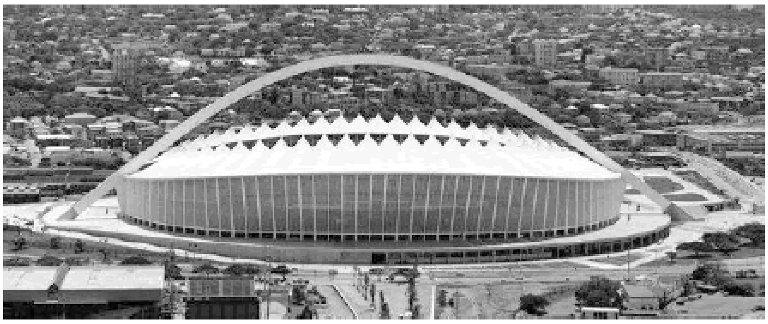
Abitur 2014 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

Das Moses Mabhida Stadion in Durban, Südafrika ist eines der Stadien, in denen die Fußballweltmeisterschaft 2010 ausgetragen wurde. Das charakteristische Element ist der Stahlbogen, der das Stadion überspannt. Die äußere Bogenspannweite am Boden beträgt 340 m und die Höhe im Scheitelpunkt 103 m.
Wählen Sie für die folgenden Berechnungen das Koordinatensystem so, dass die Bodenlinie auf der x-Achse und der höchste Punkt des Bogens auf der y-Achse liegt.



www.designboom.com/cms/images/ridoz/durb03.jpg (abgerufen am 11.8.2013).

Teilaufgabe 1. (8 BE)

Der äußere Rand des Bogens soll zum einen durch die Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x + x_1)$, zum anderen durch die Kosinusfunktion c mit $c(x) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot x\right)$ beschrieben werden.
Bestimmen Sie die Parameter a und x_1 sowie A und T so, dass die Graphen der Funktionen jeweils die im Text genannten Eigenschaften haben.

Eine andere Möglichkeit, die Bogenform durch eine Funktion zu modellieren, ist die umgekehrte Kettenlinie k mit $k(x) = C - \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{\lambda \cdot x} + e^{-\lambda \cdot x}\right)$ und den Parametern $C \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph dieser Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, und erläutern Sie die Bedeutung von C für den Funktionsgraphen.

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen dieser Funktion in Abhängigkeit von C und λ. Die Überprüfung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.

Für die Länge $L_a(x)$ des Bogens des Graphen einer Funktion f von der Stelle a bis zur Stelle x wird in der Tabelle die Formel $L_a'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ hergeleitet .

$$\overset{\frown}{AQ} = L_a(x_0 + \Delta x),\ \overset{\frown}{AP} = L_a(x_0) \Rightarrow$$

$$(1)\ \overset{\frown}{PQ} = L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)$$

$$(2)\ \left|\overline{PQ}\right| \le \overset{\frown}{PQ} \Leftrightarrow \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \le L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0) \Rightarrow$$

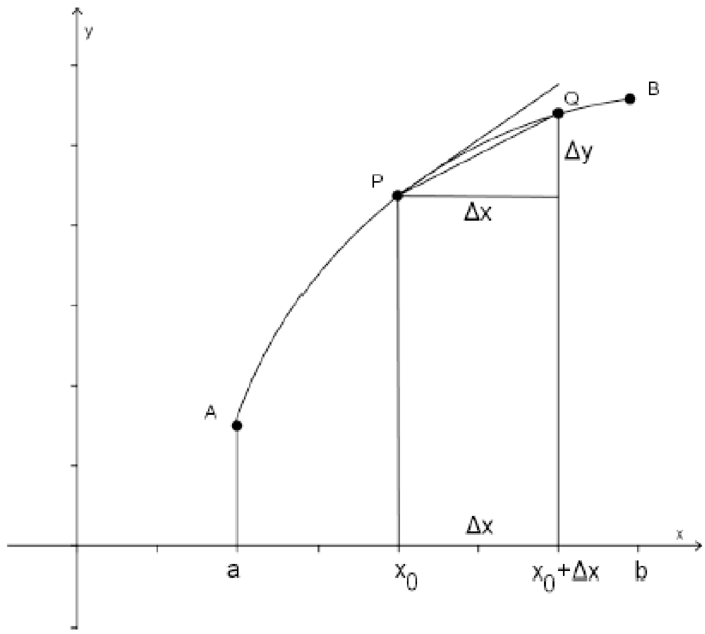
$$(3)\ \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$(4)\ \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\right) \le \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{L_a(x_0 + \Delta x) - L_a(x_0)}{\Delta x}\right) \Rightarrow \ldots$$

$$(5)\ \sqrt{1 + (f'(x))^2} = L_a{}'(x)$$

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Erklären Sie die Herleitungsschritte in der Tabelle bis einschließlich Zeile (3).
Beachten Sie dazu die untere Zeichnung.



Teilaufgabe 3.2 (8 BE)

Zeigen Sie, dass $\int \sqrt{1+(k'(x))^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left(e^{\lambda \cdot x} - e^{-\lambda \cdot x}\right) + C$ gilt.
Hinweis: Bilden Sie zunächst auf beiden Seiten der Gleichung die Ableitung.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)

Entlang des Stahlbogens verläuft auf einer Seite eine Bahn, mit der man vom Boden bis zur Aussichtsplattform im Scheitelpunkt des Bogens fahren kann.
Bestimmen Sie mithilfe der oben genannten Formel für $L_a'(x)$ und der Beziehung aus Aufgabe 3.2 die Länge der dabei zurückgelegten Strecke für $\lambda = 0,00645$.