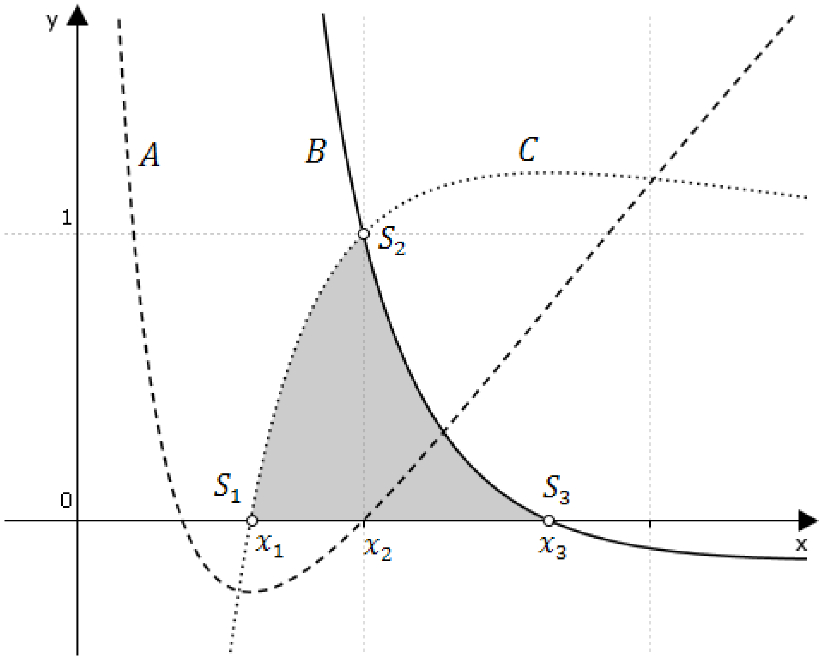
Abitur 2012 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (\ln(x))^2 + \ln(x),\ x \in \mathbb{R}^+$.

Im Material sind die Graphen der Funktion f sowie die ihrer ersten beiden Ableitungen f' und f'' abgebildet.

Material



Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Geben Sie an, welcher der Graphen A, B bzw. C jeweils zu f, f' bzw. f'' gehört. Begründen Sie dies ohne Rechnung mithilfe der Eigenschaften der drei Graphen.

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Bestimmen Sie den Inhalt des schraffierten Flächenstücks $S_1\,S_2\,S_3$, verwenden Sie hierbei die Werte $x_1 = e^{-0,5}$, $x_2 = 1$ und $x_3 = e^{0,5}$.

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration (Produktintegration) eine Stammfunktion F der Funktion f.
[zur Kontrolle: $F(x) = x\,(\ln(x))^2 - x\ln(x) + x$]

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Berechnen Sie den Inhalt des von dem Graphen von f und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks.

Die Funktion f gehört $(k = -1)$ zu der Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (\ln(x))^2 - k \cdot \ln(x)$, $k \in \mathbb{R}$.
Als Funktionenpaar in dieser Schar werden jeweils die beiden Funktionen bezeichnet, bei denen sich der Parameter k nur im Vorzeichen unterscheidet.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)

Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar f_k als Extrempunkte nur Tiefpunkte besitzen und dass die Tiefpunkte eines Funktionenpaares die gleiche y-Koordinate besitzen.

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

Für $|k| = 1$ und $|k| = 2$ sind die Nullstellen der beiden Funktionenpaare im untenstehenden Kasten gegeben.
Zeigen Sie für $|k| = 1$ und $|k| = 2$, dass die beiden Nullstellen einer Funktion eines Funktionenpaares jeweils durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor die Nullstellen der anderen Funktion des Funktionenpaares ergeben.

Nullstellen für zwei Funktionenpaare:

$\lvert k\rvert = 1$:	$f_{-1}(x) = 0$	$\Rightarrow$	$x = e^{-1}$,	$x = 1$
	$f_1(x) = 0$	$\Rightarrow$	$x = 1$,	$x = e$
$\lvert k\rvert = 2$:	$f_{-2}(x) = 0$	$\Rightarrow$	$x = e^{-2}$,	$x = 1$
	$f_2(x) = 0$	$\Rightarrow$	$x = 1$,	$x = e^2$

Teilaufgabe 3.3 (6 BE)

Es lässt sich zeigen, dass die folgenden Beziehungen gelten:
$f_1\left(e^1 \cdot x\right) = f_{-1}(x)$ und $f_2\left(e^2 \cdot x\right) = f_{-2}(x)$
Deuten Sie diese Beziehungen geometrisch.

Beweisen Sie die Verallgemeinerung:
$f_k\left(e^k \cdot x\right) = f_{-k}(x)$