Abitur 2012 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B1

Gegeben sind drei jeweils von dem Parameter t, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abhängige Punkte $A_t(t|0|0)$, $B_t(0|2t|0)$ und $C_t(0|0|3t)$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Begründen Sie, warum durch die drei Punkte für jeden Wert von t genau eine Ebene H_t aufgespannt wird.
Leiten Sie eine Koordinatengleichung für die Ebenenschar her und beschreiben Sie die Lage der Ebenen zueinander.
[mögliche Lösung: $6x + 3y + 2z = 6t$]

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

In einer dieser Ebenen H_t liegt der Punkt $P(2|-2|3)$. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t. Zeichnen Sie die Punkte A_t, B_t und C_t für diesen Wert von t in ein Koordinatensystem und verbinden Sie diese zu einem Dreieck.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Berechnen Sie den Parameter t so, dass die Ebene H_t den Abstand $d = 6$ vom Koordinatenursprung hat.

Für den Flächeninhalt F eines Dreiecks ABC mit dem Innenwinkel α an der Ecke A kann man in Formelsammlungen folgende Formel finden: $F = 0,5 \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \sin(\alpha)$.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Leiten Sie die Formel $F(t) = 3,5t^2$ für den Flächeninhalt $F(t)$ des Dreiecks $A_t B_t C_t$ aus Aufgabe 1 (für beliebiges t) her.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Bestimmen Sie die Gerade durch den Punkt C_t, die das Dreieck $A_t B_t C_t$ in zwei gleich große Teilflächen zerlegt.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die Matrix M der linearen Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich, die den Punkt A_1 auf den Punkt A_2, den Punkt B_1 auf den Punkt B_2 und den Punkt C_1 auf den Punkt C_2 abbildet.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Mit E sei die 3x3-Einheitsmatrix bezeichnet. Begründen Sie, dass die Matrix $N = \frac{u}{t} \cdot E$ die Ebene H_t auf die Ebene H_u abbildet.