Aufgabe B1 Landesabitur Hessen 2012 GK

Aufgabe 1.1 (9 BE)

Die Frage, ob die Punkte A (3| 2| 2), B(5| 3| 0) und C(7| 4| -2) auf einer Geraden liegen, lässt sich auf 2 Arten beantworten:

Variante 1 : Man betrachtet die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$. Sind die Vektoren linear abhängig oder kollinear, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden. Es gilt

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Somit lässt sich $\overrightarrow{BC}$ als Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$

schreiben, d.h. die Punkte liegen auf einer Geraden

Variante 2 : Aufstellen der Geradengleichung durch die Punkte A und B mit anschließender Punktprobe mit C. Die Gleichung der Geraden lautet

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Für $r = 2$ erhält man den Ortsvektor des Punktes C.

Da somit die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen, fällt der Punkt C bei der Aufstellung der Ebenengleichung in Parameterform weg. Die Ebene E ergibt sich zu

$$E \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zur Umformung der Parameterform in die Koordinatenform stehen auch mehrere Wege zur Verfügung.

Variante 1 : Berechnung des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Aufstellen der Normalenform

$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und Umformung in die Koordinatenform.

 © Abiturloesung.de

Variante 2 : Eliminationsverfahren. Aus der Parameterform werden 3 Gleichungen entwickelt :

(1) $x = 3 + 2r + s$

(2) $y = 2 + r + 2s$

(3) $z = 2 - 2r + 2s$

----

(1) + (3) $x + z = 5 + 3s$ (4)

2(2) + (3) $2y + z = 6 + 6s$ (5)

2(4) – (5) $2x + 2z - 2y - z = 10 - 6 \Rightarrow 2x - 2y + z = 4$

Aufgabe 1.2 (3 BE)

Es ist eine Koordinatenform der zu E parallelen Ebene F durch den Punkt P(3| 1| -1) zu erstellen. Da die Ebene F zu E parallel sein soll, hat sie den gleichen Normalenvektor wie E und damit die Gestalt F : $2x - 2y + z = d$, mit $d \in \mathbb{R}$

Die Koordinaten des Punktes P erfüllen die Ebenengleichung, also gilt

$$2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + (-1) = d \text{ , und damit } d = 3$$

Aufgabe 2 (6 BE)

Die beiden Gleichungssysteme (A) und (B) im nebenstehenden Kasten waren gegeben.

Die Aufgabe bestand zunächst darin, die Umformung zu erläutern und eine Lösung des Gleichungssystems (A) anzugeben.

(A) $2x - y + 2z = 6$
$2x - 2y + z = 4$

(B) $2x - y + 2z = 6$
$y + z = 2$

Es handelt sich bei (A) um ein unterbestimmtes Gleichungssystem aus 2 Gleichungen und 3 Unbekannten. Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus (hier in Kurzschreibweise) ergibt sich :

(1)	2	−1	2	6	
(2)	2	−2	1	4	(I) – (II) ergibt
(3)	0	0	0	0	

(1)	2	−1	2	6	
(2)	0	1	1	2	und dies entspricht der
(3)	0	0	0	0	

Koeffizientenmatrix von B. Aus der letzten Zeile $0 \cdot z = 0$ folgt $z = t,\ t \in \mathbb{R}$
aus der vorletzten Zeile $1y + 1z = 2$ folgt durch Einsetzen $y = 2 - t$
und aus der ersten Zeile $2x - y + 2z = 6$ ergibt sich $x = 4 - 1{,}5t$

Diese Lösungsmenge lässt sich in Form eines Vektors darstellen :

$$\begin{pmatrix} 4-1{,}5t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist aber gerade die Vektordarstellung einer Geraden im dreidimensionalen Raum.

Für t = -2 ergibt sich $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, der Ortsvektor des Punktes C. Damit ist auch bewiesen, dass der Punkt C zur Lösungsmenge des Gleichungssystems gehört.

Aufgabe 3.1 (4 BE)

Herleitung des Gleichungssystems : Die erste Zahl sei x
Die zweite Zahl sei y
Die dritte Zahl sei z

Daraus ergibt sich
(1) $2(x - y) = 4 - z$
(2) $2(x + z) = 6 + y$
(3) $y + z = 2$

Einfache Äquivalenzumformungen liefern die 3 gegebenen Gleichungen

(1) $2x - 2y + z = 4$
(2) $2x - y + 2z = 6$
(3) $y + z = 2$

 © Abiturloesung.de

Aufgabe 3.2 (4 BE)

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus folgt

(1)	2	−2	1	4	
(2)	2	−1	2	6	(1) – (2)
(3)	0	1	1	2	

(1)	2	−2	1	4	
(2)	0	−1	−1	−2	(2) + (3)
(3)	0	1	1	2	

(1)	2	−2	1	4
(2)	0	−1	−1	−2
(3)	0	0	0	0

Ein Vergleich der Koeffizientenmatrix der Aufgabe (2) mit Aufgabe (3) zeigt, dass beide Gleichungssysteme identische Lösungsmengen haben müssen, also

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Schülerantworten können somit auf ihre Richtigkeit überprüft werden.
Der erste Schüler hat z = 1, daraus folgt t = 1 und daraus y =1 und x = 2,5. Er hat eine richtige Lösung gefunden.

Der zweite Schüler hat z = 3, daraus folgt t = 3 und daraus y = -1 . Dies ist ein Widerspruch zu y = 1. Der Schüler hat falsch gerechnet.

Der dritte Schüler hat z = 0,5, daraus folgt t = 0,5 und daraus y = 1,5 und x = 3,25. Damit ist auch diese Lösung korrekt.

 © Abiturloesung.de

Aufgabe 3.3 (4 BE)

Aus der Lösungsmenge $L = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll eine möglichst kleine Lösung aus nichtnegativen ganzen Zahlen entwickelt werden. Damit der Term $4 - 1,5t$ ganzzahlig wird, muss t eine gerade ganze Zahl sein. Für $r = 4, 6, 8$ usw. wird x negativ.

Für $r = 2$ wird $x = 1$, $y = 0$ und $z = 2$

Für $r = 0$ wird $x = 4$, $y = 2$ und $z = 0$

Für $r = -2, -4, -6, \ldots$ wird z negativ.

Die kleinste nichtnegative ganzzahlige Lösung ist also $x = 1$, $y = 0$ und $z = 2$