

## Abitur 2011 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

An einem kleinen Fluss ist für die Dauer von etwa 14 Tagen ein Hochwasser aufgetreten. Im Verlauf der ersten zwei Tage nach Beginn der Messung stieg der Durchfluss (vgl. Material 1) am Messstandort vom Normalwert (6 Millionen  $\text{m}^3$  Wasser pro Tag) aus und erreichte nach zwei Tagen den Maximalwert von 10,4 Millionen  $\text{m}^3$  pro Tag. Danach ging das Hochwasser zunächst schneller werdend und anschließend im langsamer werdend auf den Normalwert zurück.

### Material 1

Unter Abfluss bzw. Durchfluss versteht man das Wasservolumen, welches einen bestimmten Querschnitt pro Zeiteinheit durchfließt. So hat z. B. der Rhein am Pegel Köln einen mittleren Abfluss von ca. 2100 Kubikmetern pro Sekunde. Bei einem Hochwasser können es über  $10.000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  Wasser sein, die an dieser Stelle den Rhein hinabfließen.

### Teilaufgabe 1. (6 BE)

Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem einen möglichen Verlauf des Durchflusses während des Hochwassers und beurteilen Sie, inwieweit einer der folgenden Funktionstypen für die funktionale Beschreibung des Verlaufs in Frage kommt.

$$f_1(x) = a \cdot \cos(k \cdot x + d) + c; \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$f_2(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-d)^2}{\lambda}} + c; \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Für die folgenden Aufgaben benutzen Sie  $f(x) = b \cdot x \cdot e^{-\frac{\lambda}{b} \cdot x} + c$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $b, c, \lambda \in \mathbb{R}^+$ , wobei  $x$  die seit Beginn der Messung verstrichene Zeit ist ( $x$  in Tagen).

### Teilaufgabe 2.1 (10 BE)

Bestimmen Sie zunächst die Parameter  $b$ ,  $c$  und  $\lambda$  so, dass die Angaben über den Durchfluss im Verlauf des Hochwassers erfüllt sind, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein passendes Koordinatensystem.

$$[\text{Zur Kontrolle: } f(x) \approx 6 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 6; \quad x \in \mathbb{R}]$$

**Teilaufgabe 2.2** (11 BE)

Zeigen Sie durch eine geeignete Rechnung, dass der Durchfluss zum Zeitpunkt  $x = 4$  am stärksten abnimmt.

Erklären Sie die einzelnen Schritte der Im Kasten dargestellten Rechnung. Erläutern Sie die Bedeutung des Ergebnisses  $x = 8$  im Sachzusammenhang.

(1)	$y = f'(4) \cdot x + b$	$\Rightarrow$
(2)	$y = f'(4) \cdot x + (f(4) - f'(4) \cdot 4)$	$\Rightarrow$
(3)	$y = -6 \cdot e^{-2} \cdot x + 48 \cdot e^{-2} + 6$	
(4)	$6 = -6 \cdot e^{-2} \cdot x + 48 \cdot e^{-2} + 6$	$\Leftrightarrow$
(5)	$x = 8$	

**Teilaufgabe 3.** (8 BE)

Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das insgesamt während des 14-tägigen Hochwassers *zusätzlich* am Messstandort vorbei fließt.

**Teilaufgabe 4.** (5 BE)

Es soll die Frage untersucht werden, wie man zu den Durchflusszahlen eines Tages gelangt. Für den Pegel (Messstandort) beschreibt die Abflusstafel (Material 2) den Durchfluss in Abhängigkeit vom Pegelstand. Der Pegelstand ist ein Maß für den Wasserstand am Pegel.

Am 2. Tag wurde jede Stunde der Pegelstand (in cm) gemessen. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle dargestellt:

Std.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Pegel- Stand (cm)	590	600	610	620	630	635	640	646	650	654	656	658	660	661	661	662	662	663	664	666	668	671	676	682	691

Beschreiben Sie, wie man aus dieser Tabelle den Durchfluss von 10,4 Millionen  $\text{m}^3$  pro Tag erhält, und stellen Sie den Zusammenhang mit dem Begriff des bestimmten Integrals dar.

Die Durchführung der Berechnung ist nicht erforderlich.

**Material 2:****Abflusstafel**

cm	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0	2,3	4,6	6,9	9,3	11,6	13,9	16,2	18,5	20,8
100	23,1	25,5	27,9	30,1	32,4	34,7	37,0	39,4	41,7	44,0
200	46,3	48,6	50,9	53,2	55,6	57,9	60,2	62,5	64,8	67,1
300	69,4	71,7	74,0	76,2	78,3	80,4	82,5	84,5	86,4	88,3
400	90,1	92,0	93,7	95,4	97,1	98,7	100,2	101,7	103,2	104,6
500	106,0	107,3	108,5	109,8	110,9	112,0	113,1	114,1	115,1	116,0
600	116,9	117,7	118,5	119,2	119,9	120,5	121,1	121,7	122,1	122,6

Die Abflusstafel dient zur überschlägigen Ermittlung des Abflusses an einem Messstandort, dessen Pegelstand bekannt ist.

Beispiel: In der obenstehenden Tabelle wird der Abfluss für einen Pegelstand von 130 cm bestimmt. Das Ergebnis liegt im Schnitt der Zeile „100“ und der Spalte „30“. Es ergibt sich hier ein Abfluss von  $30,1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Zwischenwerte können linear aus den beiden benachbarten Zahlen interpoliert werden.