Aufgabe A2 Landesabitur Hessen 2011 LK

Aufgabe 1 (6 BE)

Der Graph der gesuchten Funktion muss folgende Eigenschaften haben:

1) $f(0) = 6 \qquad \left(6 \cdot 10^6\ \frac{m^3}{Tag}\right)$

2) $f(2) = 10{,}4 \quad \text{(Maximalwert)}$

3) Der Durchfluss steigt bis zum Ende des zweiten Tages an, dann sinkt er ab und nähert sich asymptotisch bis etwa zum Anfangswert.

$f_1(x)$ kommt nicht in Frage. Zwar lassen sich die Parameter so anpassen, dass $f_1(x)$ im betrachteten Intervall ein Maximum hat, doch kann sich der Graph von $f_1(x)$ nicht asymptotisch dem Anfangswert annähern. Außerdem wäre der Graph von $f_1(x)$ achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt. $f_2(x)$ kommt auch nicht in Frage. Der Graph von $f_2(x)$ hat zwar einen Hochpunkt und fällt sogar asymptotisch ab, doch ist auch er achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt.

Aufgabe 2.1 (10 BE)

$f(x) = bxe^{-\frac{\lambda}{b}x} + c\,, \qquad x \in IR_0^+,\ b, c, \lambda \in IR^+$

$f'(x) = be^{-\frac{\lambda}{b}x} + bx\left(-\frac{\lambda}{b}\right)e^{-\frac{\lambda}{b}x}$

Bedingungen:

a) $f(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = b \cdot 0 \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad c = 6$

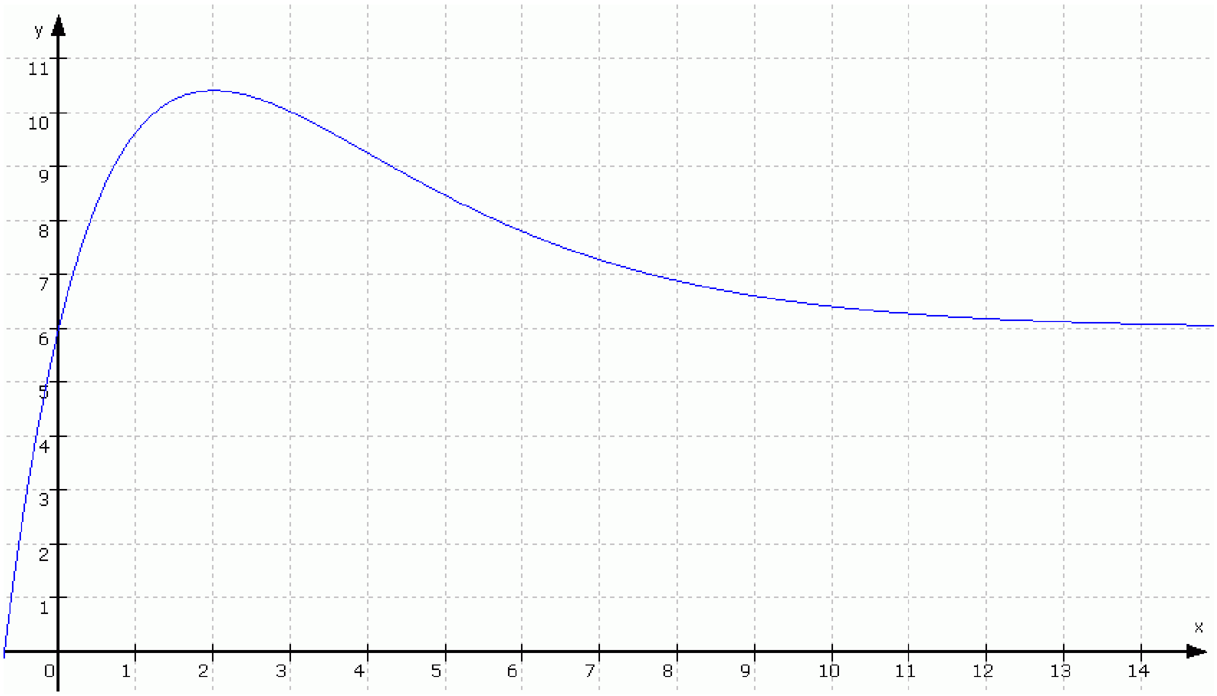
b) $f(2) = 10{,}4 \quad \Rightarrow \quad 10{,}4 = b \cdot 2 \cdot e^{-\frac{22}{b}} + 6$

c) $f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = e^{-\frac{-2\lambda}{b}} \cdot b - 2\lambda e^{-\frac{2\lambda}{b}} = (b - 2\lambda)e^{-\frac{2\lambda}{b}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{b}{2}$

Für *f(x)* gilt somit: $f(x) = bxe^{-\frac{x}{2}} + 6$

Mit b) folgt: $4{,}4 = 2be^{-1} \leftrightarrow 2{,}2 = \frac{b}{e} \leftrightarrow b = 2{,}2e \approx 5{,}98 \approx 6$

Somit gilt näherungsweise: $f(x) = 6xe^{-\frac{x}{2}} + 6$



 © Abiturloesung.de

Aufgabe 2.2 (11 BE)

Wendepunkt: $f(x) = 6xe^{-\frac{x}{2}} + 6$

$$f'(x) = 6e^{-\frac{x}{2}} + 6x\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = (6-3x)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = (-3)e^{-\frac{x}{2}} + (6-3x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}x - 6\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{3}{2}x - 6\right)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f'''(4) = \left(-3 + \frac{9}{2}\right)e^{-2} = \frac{3}{2e^2} \neq 0$$

$f(4) = 24e^{-2} + 6 \approx 9{,}25 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt $(4|9{,}25)$

Der Durchfluss nimmt am stärksten an der Wendestelle von $f(x)$ ab, also nach 4 Tagen.
Gleichung der Tangente im Wendepunkt:

$y = mx + b$

$$f(4) = f'(4) \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = f(4) - f'(4) \cdot 4$$

Tangentengleichung: $y = f'(4)x + [f(4) - f'(4) \cdot 4]$ (2)

Nun werden die Terme für $f'(4)$ und $f(4)$ in (2) eingesetzt. Somit ergibt sich (3):

$$y = (6-12)e^{-2}x + [24e^{-2} + 6 - (-6e^{-2}) \cdot 4] = -6e^{-2}x + 48e^{-2} + 6$$

© Abiturloesung.de

Nun wird der Punkt der Wendetangente mit der Ordinate 6 gesucht:

$6 = -6e^{-2}x + 48e^{-2} + 6$ (4)

Man löst diese Gleichung nach x auf und erhält (5):

$$6e^{-2}x = 48e^{-2} \leftrightarrow x = 8$$

Unterstellt man also, dass nach 4 Tagen die stärkste Abnahme des Durchflusses vorliegt, so kann man frühestens nach 8 Tagen damit rechnen, dass der Durchfluss wieder den Normalwert 6 erreicht hat.

Aufgabe 3 (8 BE)

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der Geraden y = 6.

$$A = \int_0^{14} \left(6xe^{-\frac{x}{2}} + 6 - 6\right) dx = \int_0^{14} 6xe^{-\frac{x}{2}} dx$$

Partielle Integration (mit $u(x) = 6x$ und $v'(x) = e^{-\frac{x}{2}}$) liefert:

$$A = \left[-12xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{14} - \int_0^{14} 6 \cdot 2e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-12xe^{-\frac{x}{2}} - 24e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{14}$$
$$= -168e^{-7} - 24e^{-7} - (-24) = 24 - 192e^{-7} \approx 23{,}825$$

Folglich fließen ca. $24 \cdot 10^6 m^3$ Wasser zusätzlich am Standort vorbei.

 © Abiturloesung.de

Aufgabe 4 (5 BE)

Aus der Tabelle in Material 2 müssen die Durchflussmengen zu jeder Stunde bestimmt werden. Trägt man diese gegenüber der Zeit (in h) in einem Koordinatensystem ein, so erhält man die Durchflussmengen in Abhängigkeit von der Zeit. Durch diese Datenpunkte verläuft der Graph einer Funktion.

Will man die Durchflussmenge für den gesamten Tag bestimmen, so müsste man das Integral dieser Funktion von 0 bis 24 berechnen und den Wert mit 360 multiplizieren. Eine Näherung für dieses Integral bilden die Rechtecksummen, wobei jedes Rechteck aus der Intervalllänge 1h = 3600 s und der Durchflussmenge pro Sekunde (laut Tabelle) besteht.

 © Abiturloesung.de