Abitur 2009 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B2

Ein landwirtschaftliches Unternehmen baut drei verschiedene Getreidesorten an. Als Ressourcen stehen noch 33 Tonnen Düngemittel und 810 offene Arbeitsstunden zur Verfügung.
Zur Bearbeitung eines Hektars (ha) werden benötigt:

	Düngemittel [t]	Arbeitszeit [h]
Sorte A	0,6	9
Sorte B	0,4	12
Sorte C	0,5	15

Mit diesen Angaben kann man das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

(1) $0,6x + 0,4y + 0,5z = 33$
(2) $9x + 12y + 15z = 810$

Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung der Variablen und der beiden Gleichungen.
Berechnen Sie die vollständige Lösung des Gleichungssystems.

Teilaufgabe 1.2 (10 BE)

Die vorhandenen Ressourcen an Düngemittel und Arbeitsstunden sollen vollständig ausgeschöpft werden.

- Bestimmen Sie, wie viel Hektar der Sorten A und C bearbeitet werden können, wenn 40 Hektar der Sorte B angebaut werden sollen.
- Bestimmen Sie die maximale und die minimale Gesamt-Anbaufläche.

Die Gleichungen (1) und (2) beschreiben je eine Ebene E_1 bzw. E_2 im Raum $\mathbb{R}^3$.

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Bestimmen Sie die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x-z-Ebene sowie deren Schnittpunkt S.
Deuten Sie dessen Koordinaten im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 2.2

Bestimmen Sie mit Hilfe der Spurgeraden von E_1, wie viele Hektar der Sorten A und C jeweils maximal angebaut werden können, wenn nur die Düngemittelressourcen berücksichtigt werden.

Die Spalten der obigen Tabelle sollen als Vektoren $\overrightarrow{d}$ (Düngemittel) und $\overrightarrow{a}$ (Arbeitszeit) aufgefasst werden. Ferner sei der Vektor $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ gegeben, der die jeweils benötigte Menge an Pflanzenschutzmittel (in kg/ha) für die Sorten A, B und C angibt.

Teilaufgabe 3.1 (12 BE)

Beschreiben Sie, wie man überprüfen kann, ob die drei Vektoren $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{p}$ linear unabhängig sind.

Bestätigen Sie, dass gilt: $\overrightarrow{p} = -10 \cdot \overrightarrow{d} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{a}$.

Teilaufgabe 3.2

Erklären Sie die Gleichung (A) und die weiteren Umformungsschritte (B) bis (D) im unten Stehenden Kasten und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Es sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = -10\,\vec{d} + \frac{4}{3}\,\vec{a}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 6x + 12y + 15z &= \vec{p} \cdot \vec{x} && (A) \\ &= \left(-10\,\vec{d} + \frac{4}{3}\,\vec{a}\right) \cdot \vec{x} && (B) \\ &= -10\,\vec{d} \cdot \vec{x} + \frac{4}{3}\,\vec{a} \cdot \vec{x} && (C) \\ &= -10 \cdot 33 + \frac{4}{3} \cdot 810 = 750 && (D) \end{aligned}$$