Abitur 2009 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B1

An einigen Orten findet man auch heute noch alte Trafo- oder Umspannhäuschen. In ihnen wurde früher die höhere Überlandspannung durch Transformatoren in die übliche Haushaltsspannung geändert. Die Trafohäuschen haben meist die Form einer Säule mit quadratischer Grundfläche und einer als Dachstuhl passend aufgesetzten senkrechten Pyramide.
Im vorliegenden Fall haben die Grundflächenkanten der $14\,\mathrm{m}$ hohen Säule eine Länge von $6\,\mathrm{m}$. Die Dachspitze T befindet sich $6\,\mathrm{m}$ über dem Mittelpunkt der Deckfläche der Säule.

Teilaufgabe 1. (4 BE)

Zeichnen Sie das Trafohäuschen mit den unteren Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|6|0)$ und $D(0|6|0)$ sowie den entsprechenden oberen Eckpunkten E, F, G und H (gleiche Reihenfolge wie zuvor) und der Dachspitze T in ein geeignetes Koordinatensystem. Geben Sie die Koordinaten der Punkte E, F, G, H und T an.

Teilaufgabe 2. (8 BE)

Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich benachbarte dreieckige Seitenflächen der Dachpyramide schneiden. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Teilaufgabe 3. (4 BE)

Heute nutzt man die noch nicht abgerissenen Trafohäuschen gern als Unterbau für Mobilfunkmasten.
Dazu wird im vorliegenden Fall auf dem Trafohäuschen ein $5\,\mathrm{m}$ hoher Antennenmast angebracht. Wegen der notwendigen Stabilität wird er auf dem Dachboden verankert. Er steht senkrecht auf dem Dachboden und geht durch den Schwerpunkt der Dachfläche, die durch die Punkte G, H und T festgelegt ist.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes und der Spitze dieser Antenne. Ergänzen Sie Ihre Zeichnung zu Teilaufgabe 1 um diesen Antennenmast.

Information: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ hat den Ortsvektor $\overrightarrow{s} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$

Teilaufgabe 4. (6 BE)

In der Nähe des Trafohäuschens steht im Punkt $P(3|20|0)$ ein $13\,\mathrm{m}$ hoher vertikaler Fahnenmast.

Die Sonne scheint zum Beobachtungszeitpunkt in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie nach, dass der Schatten des Fahnenmastes auf die Wand $CDHG$ des Trafohäuschens trifft, und bestimmen Sie die gesamte Länge des Schattens auf dieser Wand.

Wählen Sie nachfolgend **entweder** die Aufgabe 5.1 **oder** die Aufgabe 5.2.

Teilaufgabe 5.1 (8 BE)

(Variante Kugel)
Die alten Trafohäuschen werden manchmal auch als Unterbau für die Druckbehälter der lokalen Wasserversorgung genutzt. Im vorliegenden Fall soll in den Dachraum des Trafohäuschens ein möglichst großer kugelförmiger Druckbehälter eingebaut werden.
Berechnen Sie den Radius dieses Behälters und beurteilen Sie, ob durch den Einbau dieses Tanks der Mobilfunkmast versetzt werden muss.

oder

Teilaufgabe 5.2 (8 BE)

(Variante Matrix)
Die Sonnenstrahlen (Richtung wie in Teilaufgabe 4) projizieren ein Schattenbild des Trafohäuschens auf eine glatte hohe Felswand, die sich in der Nähe des Trafohäuschen erhebt. Die Felswand wird im zu betrachtenden Bereich durch die Ebene $E : 6x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$ beschrieben.
Die Abbildungsmatrix A für diese Projektion, die jedem Punkt des Trafohäuschens seinen Schatten zuordnet, ist

$$A = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -42 & -2 & -7 \\ -24 & -32 & 50 \end{pmatrix} .$$

Beschreiben Sie Ihr Vorgehen zur Bestimmung dieser Matrix und bestimmen Sie durch geeignete Rechnungen die Matrixelemente a_{11} , a_{12} und a_{13} der ersten Zeile dieser Matrix.