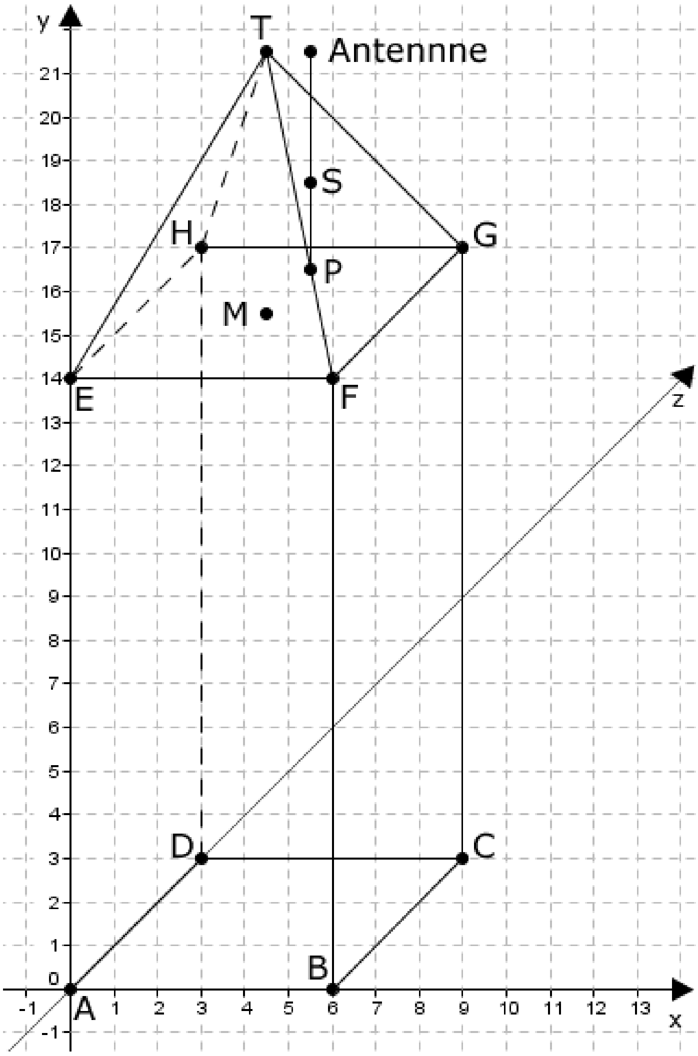
Hessen-2009-Geometrie-B1-LK

1. E(6|0|14);F(6|6|14);G(0|6|14);H(0|0|14);T(3|3|20)



2. Wir berechnen die Ebenen E_{EFT} und E_{FGT}. Der gesuchte Winkel α ist dann der Winkel zwischen zwei Normalvektoren der Ebenen:

$$E_{EFT} = E_1 : \bar{x} = \overline{OE} + \lambda\overline{EF} + \mu\overline{ET} = \begin{pmatrix}6\\0\\14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix};$$

$$E_{FGT} = E_2 : \bar{x} = \overline{OF} + \lambda\overline{FG} + \mu\overline{FT} = \begin{pmatrix}6\\6\\14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\0\\18\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\36\\18\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n_1} * \overline{n_2}}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \alpha = 78{,}46^0$$

3. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind $x_{S=}\frac{x_A + x_B + x_C}{3}$,… also

$$x_S = \frac{x_F + x_G + x_T}{3} = \frac{6+0+3}{3} = 3;\ y_S = \frac{6+6+3}{3} = 5\ ;\ z_S = \frac{14+14+20}{3} = 16 \Rightarrow$$

Schwerpunkt (3|5|16). Der Fußpunkt liegt vertikal darunter also auf (3|5|14). Die Spitze liegt 5 Meter über den Fußpunkt (3|5|19).

4. Die Wand (Rechteck W) CDGF besteht aus der Punktmenge $\{(x \mid y \mid z) | 0 \le x \le 6 \wedge y = 6 \wedge 0 \le z \le 14\}$
Der Schatten des Fahnenmastes wird begrenzt durch die Gerade g, die von der Spitze (3|20|13) des Fahnenmastes in Richtung $(1|-7|-4)^T$ führt:
Es muss der Schnittpunkt S von g mit dem Wandebene E_W (y=6) berechnet werden und geschaut werden, ob er im Rechteck W liegt: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ in y=6 ergibt t=2 .Damit ist S=(5|6|5) ein Punkt der Wand W und die Länge des Schattens auf der Wand = der Höhe von S über der xy-Ebene, also 5

5.1. Wir reduzieren das Problem auf die Ebene und berechnen den maximalen Kreis in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite 6 und der Höhe 6. Dieser ist gleich dem Inkreis des Dreiecks, dessen Mittelpunkt sich durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden berechnet. Legen wir die x-Achse auf die Basis und den Ursprung des Koordinatensystems auf die Mitte der Basis, dann gilt: Ein Schenkel die hat die Steigung m=2, also den Winkel arctan(2)=63,435. Dadurch ergibt sich für die Steigung der zugehörigen Winkelhalbierenden die Steigung tan(31,717)=0,618, also die Gleichung y=0,618x+b. Setzt man nun den Punkt (-3|0) ein, so erhält 0=0,618*(-3)+b➔b=1,8541. Das ist aber genau der gesuchte Radius, weil die y-Achse auch Winkelhalbierende ist.

- Die Halbkugel ist in y-Richtung durch 3+1,8541=4,8541 begrenzt. Der Fahnenmast steht aber bei y=5. Es gibt also kein Problem!!

5.2. Wir erhalten den Bildpunkt P'(x'|y'|z') des Punktes P'(x|y|z) als Schnittpunkt der Geraden $\bar{x} = \overline{OP} + \lambda \bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $E: 6x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$:

$$6(x+\lambda) + 8(y - 7\lambda) + z - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 6x + 6\lambda + 8y - 56\lambda + z - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 6x + 8y + z = 54\lambda$$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{54}(6x + 8y + z)$. Damit wird

$$\overline{OP'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{54}(6x+8y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 60x + 8y + 1z \\ -42x - 2y - 7z \\ -24x - 32y + 50z \end{pmatrix}.$$