Aufgabe A1 Landesabitur Hessen 2009 GK

1. $g(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{13}{12}x^2+\frac{7}{2}x$ ➔ $g'(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{13}{6}x+\frac{7}{2}$ ➔ $g''(x)=\frac{1}{2}x-\frac{13}{6}$

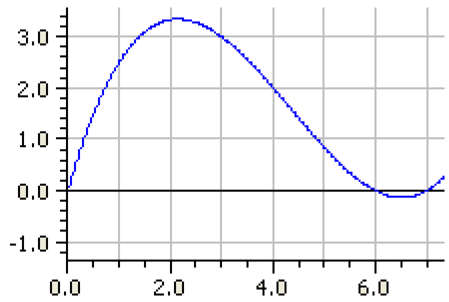
(1) <u>Nullstellen</u>: $x^3-13x^2+42x=0 \Leftrightarrow x(x^2-13x+42)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=6; x_3=7$

➔ Breite des Walls: 6m; Breite des Grabens: 1m

(2) <u>Extrema:</u> $g'(x)=0 \Rightarrow x^2-\frac{26}{3}x+14=0 \Leftrightarrow x=\frac{13}{3}\pm\sqrt{\frac{169}{9}-\frac{126}{9}}=\frac{13}{3}\pm\sqrt{\frac{43}{9}}$

➔ $x_1 \approx 2{,}15$; mit $g''(2{,}15)=1{,}07-\frac{13}{6}<0$, also Maximum bei $H(2{,}15\,|\,3{,}35)$

$x_2 \approx 6{,}52$ mit $g''(6{,}52)=3{,}125-\frac{13}{6}>0$, also Minimum bei $T(6{,}52\,|\,-0{,}14)$



Also ist der Wall 3,35m hoch und der Graben 0,14 m tief.

(3) <u>Wendepunkt:</u> bei $4{,}\overline{3}$ in Höhe 1,6

2.1. $f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$ wegen folgender Eigenschaften:

(1) $f(0)=a_0=4$

(2) $f(5)=625a_4+25a_2+4=0$

(3) $f(4)=256a_4+16a_2+4=0$ mit den Lösungen $a_4=0{,}01; a_2=0{,}41$

also $\underline{f(x)=0{,}01x^4-0{,}41x^2+4}$

2.2. maximaler Böschungswinkel = Schnittwinkel der Wendetangente mit der x-Achse.

Ableitungen bilden:

$f(x)=\frac{1}{100}x^4-0{,}41x^2+4$

$f'(x)=0{,}04x^3-0{,}82x$

$f''(x)=0{,}12x^2-0{,}82$

$f'''(x)=0{,}24x$

Mögliche Wendestellen berechnen:

$f''(x)=0$

$0{,}12x^2-0{,}82=0$

$x^2=\frac{0{,}82}{0{,}12}$

$x_1\approx 2{,}61; x_2\approx -2{,}61$

Prüfen, ob es sich um Wendepunkte handelt:
$f'''(-2{,}61) = 0{,}24 \cdot (-2{,}61) \neq 0$
$f'''(2{,}61) = 0{,}24 \cdot (2{,}61) \neq 0$
$\Rightarrow$ an den Stellen x_1 und x_2 liegen Wendepunkte vor.

Wegen der Symmetrie des Graphen wir nur eine Wendetangente betrachtet.

Steigung der Wendetangente:
$f'(-2{,}61) = 0{,}04 \cdot (-2{,}61)^3 - 0{,}82 \cdot (-2{,}61) \approx 1{,}43$

Schnittwinkel α bestimmen:
$\tan\alpha = 1{,}43 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(1{,}43) \approx 55°$
$\Rightarrow$ Aufschüttung mit Typ B

2.3. Wir berechnen zunächst

- Die Querschnittsfläche des Walls aus $\int_{-4}^{4} f(x)dx = \left[0{,}002x^5 - 0{,}13\overline{6}x^3 + 4x\right]_{-4}^{4}$ =18,6m²
- Das Volumen des Walls =18,6m²*100m=1860m³
- Die Querschnittsfläche der Ausgrabungen aus $-2\int_{4}^{5} f(x)dx = \left[0{,}002x^5 - 0{,}13\overline{6}x^3 + 4x\right]_{4}^{5} \approx -2*(-0{,}135)$ =0,27m²
- Das Volumen des Grabens =0,27m²*100m=27m³
- Das zusätzliche Materialvolumen beträgt 1860m³-27m³=1833m³