Abitur 2008 Mathematik LK Geometrie Aufgabe B2

Gegeben sind der feste Punkt $P(0|3|-3)$ und der von einem Parameter $k \in \mathbb{R}$ abhängige Punkt $Q_k(3|-k|0)$.

Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g_k durch P und Q_k an.

Teilaufgabe 1.2

Zeigen Sie, dass alle Geraden g_k in einer Ebene liegen, und geben Sie deren Koordinatengleichung an.

Teilaufgabe 2. (10 BE)

Die Ebene E, die orthogonal zu der Strecke $\overline{PQ_k}$ ist und durch deren Mittelpunkt geht, heißt Mittelebene.

Bestimmen Sie die Gleichungen derjenigen Mittelebenen, die durch den Ursprung verlaufen.

Wählen Sie nachfolgend **entweder** die Aufgabe K3 **oder** die Aufgabe M3.

Teilaufgabe k.3 (10 BE)

(Variante Kugel)
Die Mittelebene E aus Aufgabe 2 hat für $k = 3$ die Gleichung $x - 2y + z = 0$.
Zwei Kugeln K_1 und K_2 haben denselben Mittelpunkt P,
K_1 habe den Radius $r_1 = \left| \overrightarrow{PQ_3} \right|$, K_2 die Mittelebene E als Tangentialebene.

- Skizzieren Sie die Lage der Kugeln und bestimmen Sie deren Gleichungen.
- Wie verhalten sich ihre Volumina zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Beschreiben Sie, wo die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, die zugleich K_1 und K_2 berühren.
- Bestimmen Sie den Radius des Kreises, der Schnittmenge von E und K_1 ist.

oder

Teilaufgabe m.3 (10 BE)

(Variante Matrix)
Die Mittelebene E aus Aufgabe 2 hat für $k = 3$ die Gleichung $x - 2y + z = 0$.
Der Punkt $B(6|0|0)$ wird (orthogonal) an E gespiegelt.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

- Zeigen Sie, dass sich dieser auch durch Multiplikation mit der Matrix

  $$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ berechnen lässt.

- Die Matrix S erfüllt die Bedingung $S \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Erläutern Sie, welche geometrische Bedeutung diese Eigenschaft für die durch S beschriebene Abbildung hat.

© Abiturloesung.de