

Hessen-2007-Stochastik-C2-LK

a. Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment mit Binomialverteilung mit $p=0,02$ und $n=50$. $X=k$ bedeutet, dass k Personen erkrankt sind.

- $P(X = 2) = \binom{50}{2} 0,02^2 \cdot 0,98^{48} = 0,1858$
- $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} 0,02^0 \cdot 0,98^{50} = 1 - 0,3642 = 0,6358$

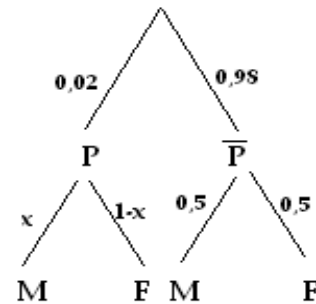
b.1. P : erkrankt; \bar{P} : gesund = nicht erkrankt; M: Männer; F: Frauen
Gesucht ist $P(P|M)$. Dazu berechnen wir zunächst mit Hilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit $P(M|P)=x$ aus der Gleichung: $0,02x + 0,98 \cdot 0,5 = 0,498 \Leftrightarrow$

$$0,02x = 0,498 - 0,49 \Leftrightarrow \underline{x = 0,4}$$

Damit wird

$$P(P|M) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \cap P)}{P(M)} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{0,498}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P(P|M)=1,6\%}$$



b.2. $P(P|F) = \frac{P(P \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F \cap P)}{P(F)} = \frac{0,02 \cdot 0,6}{0,502} \Leftrightarrow \underline{P(P|F)=2,39\%}$

→ Die P-Erkrankung eines Menschen hängt vom Geschlecht ab!!

c. Bei diesem Schnelltest handelt es sich um einen Hypothesentest mit $p_0 = 0,05$ bzw. $p_1 = 0,10$ mit der Entscheidungsregel, bei mehr als 75 P-Teilchen von 1000 Zellteilchen eine ausführliche Untersuchung vorzunehmen. Es sind zwei grundsätzliche Fehlentscheidungen möglich:

- Fehler 1. Art: Man findet mehr als 75 P-Teilchen, obwohl das Blut ok ist: $\alpha = P(X > 75) = 1 - P(X \leq 75) = 1 - F(1000; 0,05; 75) = 1 - 0,9997 = 0,0003 = 0,03\%$
- Fehler 2. Art: Man findet weniger als 76 P-Teilchen, obwohl das Blut nicht ok ist: $\beta = P(X \leq 75) = F(1000; 0,1; 75) = 0,0038 = 0,38\%$

d.1. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest mit $n=1000$ und $\alpha=10\%$ mit Prüfhypothese $H_0 : p = 0,02$ Alternativhypothese $H_1 : p > 0,02$. Aus dem α -Fehler berechnen wir die Entscheidungsregel:

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 0,1 \Leftrightarrow P(X \leq k) = 0,9 \Leftrightarrow F(1000; 0,02; k) = 0,9. \text{ Aus der Binomialtabelle ermitteln wir } F(1000; 0,02; 25) = 0,89 \text{ und } F(1000; 0,02; 26) = 0,92$$

Die Entscheidungsregel muss also lauten: Die Prüfhypothese wird abgelehnt, wenn beim Test von 1000 Personen mehr als 25 Personen P-erkrankt sind.

d.2. Zu berechnen ist der Fehler 2. Art für $p=0,03$:

$$\beta = P(X \leq 25) = F(1000; 0,03; 25) = 0,20, \text{ also } 20\%$$