Abitur 2023 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Bestimmen Sie D und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Geben Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von f an.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $g : x \mapsto \sqrt{x} + 1$.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(1|g(1))$.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Die Funktion g ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion g^{-1} von g ist in $[1; +\infty[$ definiert. Bestimmen Sie einen Term von g^{-1}.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -x^2 + 2a\,x$ mit $a \in]1; +\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 1). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.

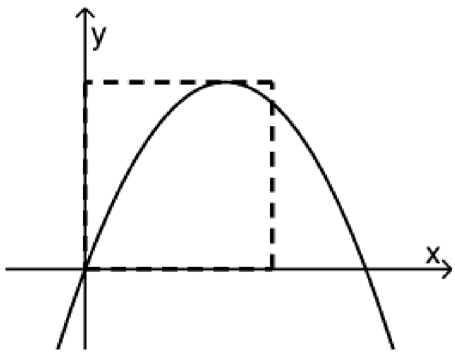


Abb. 1

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

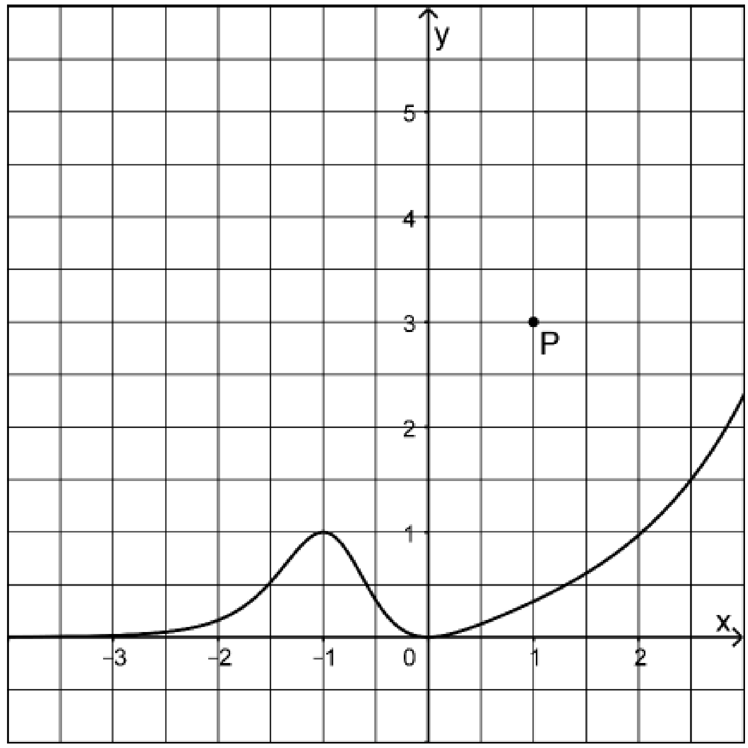


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau.
An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 06:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$ beschrieben werden. Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde an.
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \leq x \leq 4$.
Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)$.

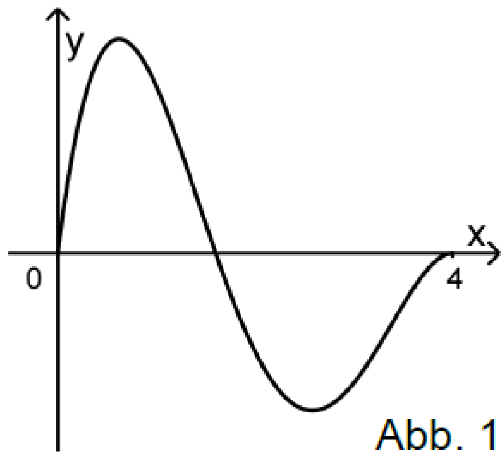


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt.

Teilaufgabe Teil B 1b (1 BE)

Es gilt $f(2) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B 1c (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe.

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die mittlere Änderungsrate der Staulänge.

Teilaufgabe Teil B 1g (3 BE)

Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde.

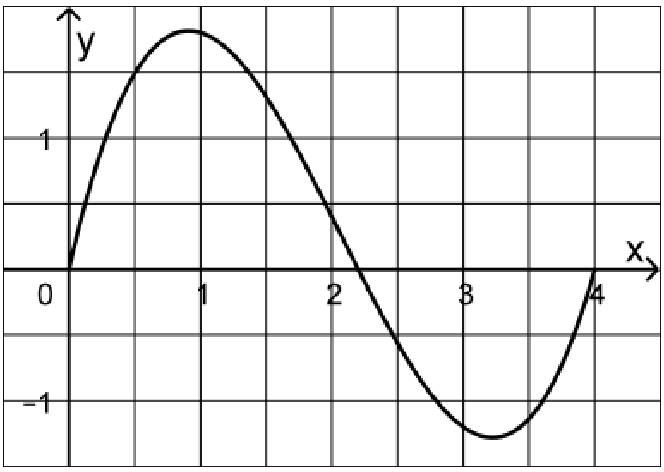


Abb. 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in \{1; 2; 3 \dots\}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben.

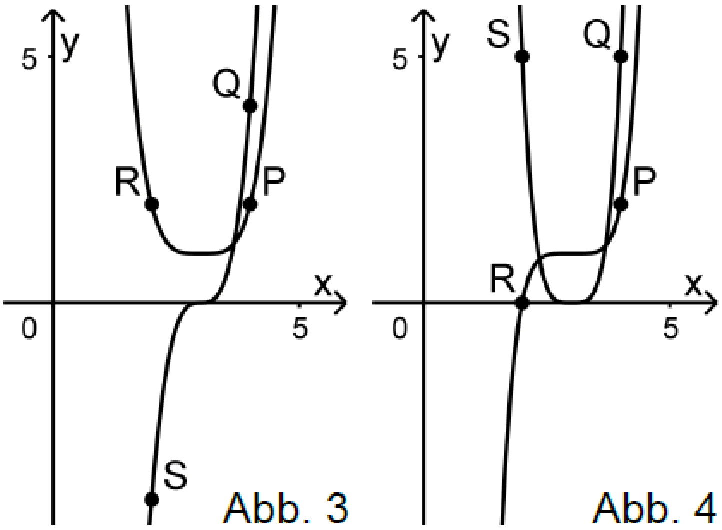
Teilaufgabe Teil B 2c (6 BE)

Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

Teilaufgabe Teil B 2d (7 BE)

Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k. Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P\ (4|h_k(4))$, $Q\ \left(4|h'_k(4)\right)$, $R\ (2|h_k(2))$ und $S\ \left(2|h'_k(2)\right)$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.



Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k+1$ überein.