Abitur 2023 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - 1$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)\,\mathrm{dx}$.

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

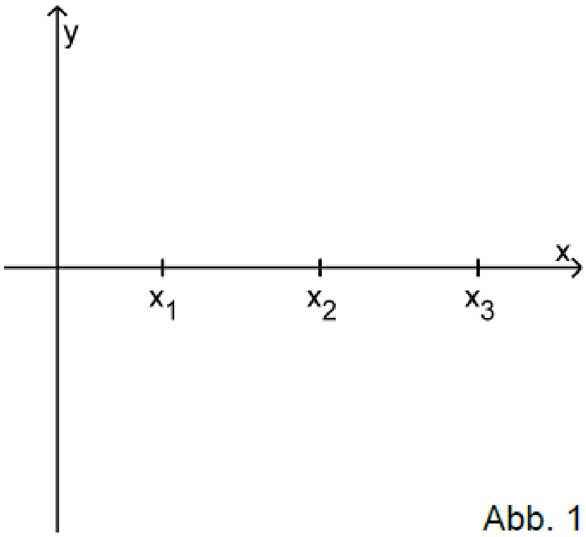


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.

Abbildung 2 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, dessen einzige Extrempunkte $(-1|1)$ und $(0|0)$ sind, sowie den Punkt P.

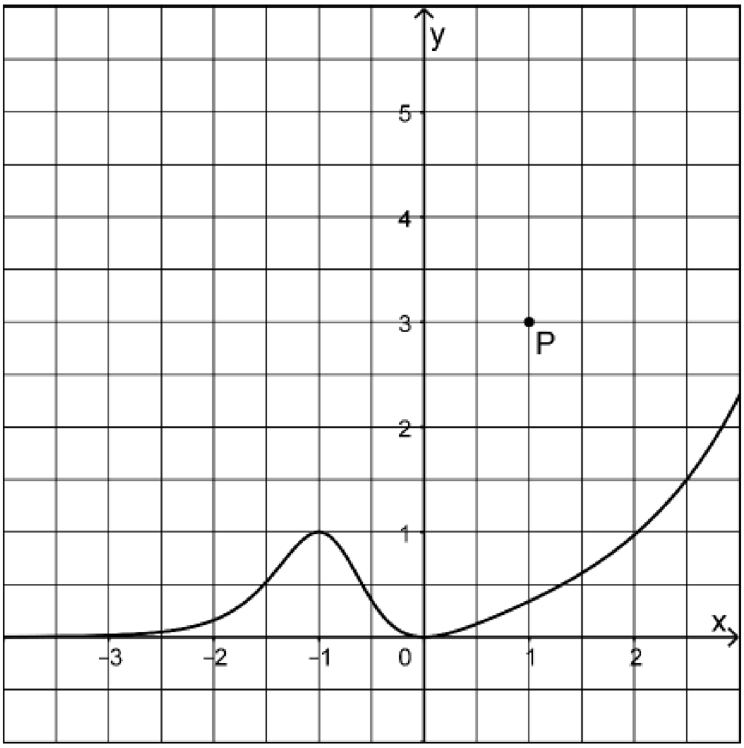


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = -g(x-3)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Der Graph einer Stammfunktion von g verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in Abbildung 2.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f, der die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

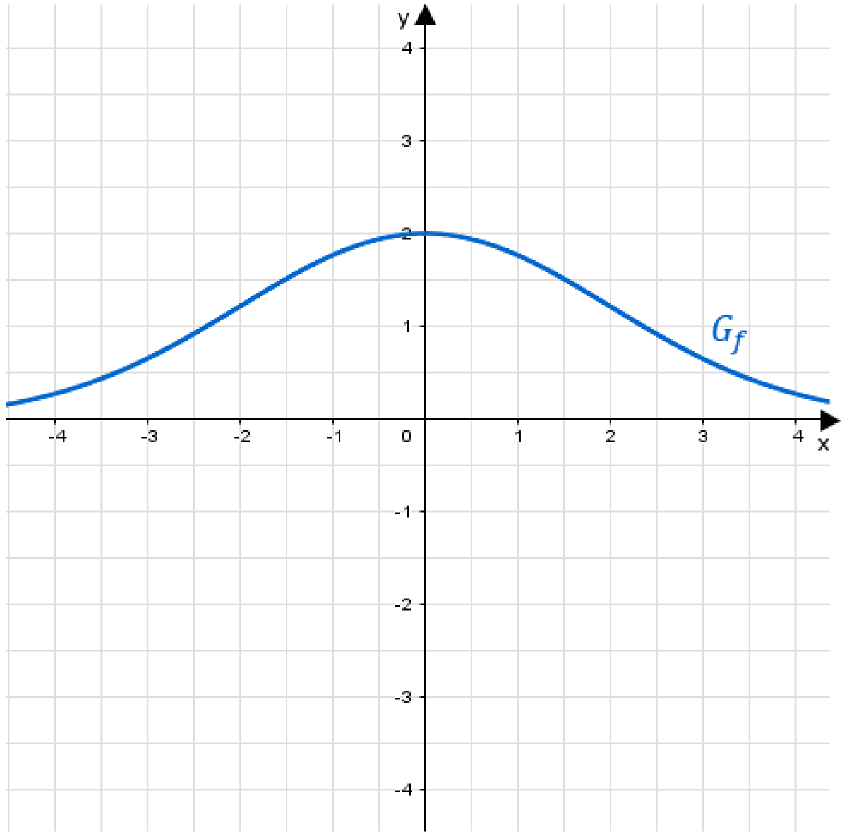


Abb. 3

Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Der Punkt $W\left(-2|2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist einer der beiden Wendepunkte von G_f. Die Tangente an G_f im Punkt W wird mit w bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von w und berechnen Sie die Stelle, an der w die x-Achse schneidet.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$)

Betrachtet wird für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ das Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c|0)$, $Q(c|0)$, $R\ (c|f(c))$ und S.

Teilaufgabe Teil B 1c (1 BE)

Zeichnen Sie für $c = 2$ das Rechteck PQRS in Abbildung 3 ein.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Berechnen Sie denjenigen Wert von c, für den $\overline{\mathrm{QR}} = 1$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von c die Seitenlängen des Rechtecks PQRS an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$ gegeben ist.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Es gibt einen Wert von c, für den der Flächeninhalt $A(c)$ des Rechtecks PQRS maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von c.

Betrachtet werden für $k \in \mathbb{R}$ die in $]-\infty; 0]$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto f(x) + k$. Somit gilt $f_0(x) = f(x)$, wobei sich f_0 und f im Definitionsbereich unterscheiden.

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Begründen Sie mithilfe der ersten Ableitung von f_k, dass f_k für jeden Wert von k umkehrbar ist. Skizzieren Sie in Abbildung 3 den Graphen der Umkehrfunktion von f_0.

Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

Geben Sie alle Werte von k an, für die der Graph von f_k und der Graph der Umkehrfunktion von f_k keinen gemeinsamen Punkt haben.

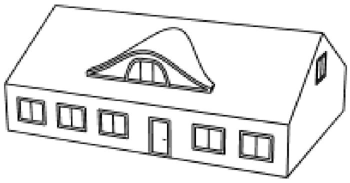


Abb. 4

Abbildung 4 zeigt ein Haus mit einer Dachgaube, deren Vorderseite schematisch in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Vorderseite wird modellhaft durch das Flächenstück beschrieben, das der Graph G_f der Funktion f aus Teil B Teilaufgabe 1, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen $x = -4$ und $x = 4$ einschließen. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

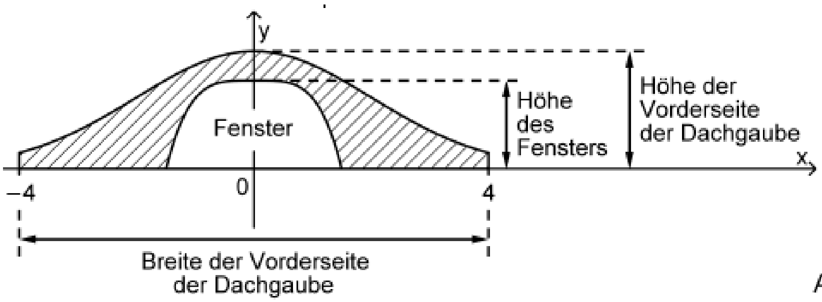


Abb. 5

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie die Breite und die Höhe der Vorderseite der Dachgaube an.

In der Vorderseite der Dachgaube befindet sich ein Fenster. Dem Fenster entspricht im Modell das Flächenstück, das der Graph der Funktion g mit $g(x) = a\,x^4 + b$ und geeigneten Werten $a, b \in \mathbb{R}$ mit der x-Achse einschließt (vgl. Abbildung 5).

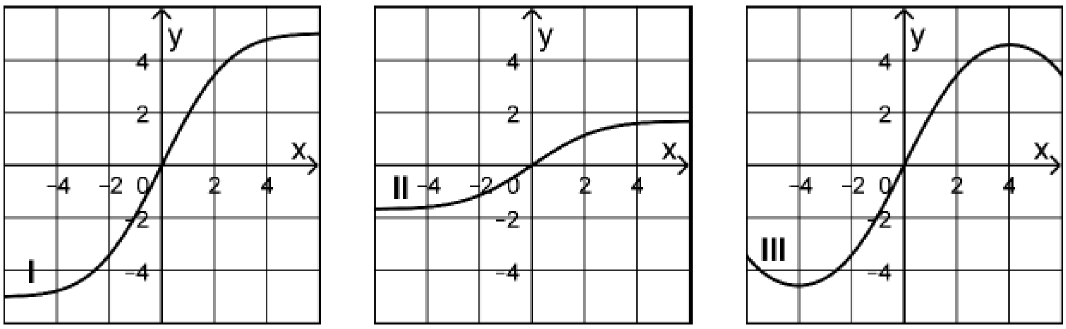
Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie, dass a negativ und b positiv ist.

Um den Flächeninhalt der Vorderseite der Dachgaube zu ermitteln, wird eine Stammfunktion F von f betrachtet.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Einer der Graphen I, II und III ist der Graph von F. Begründen Sie, dass dies Graph I ist, indem Sie jeweils einen Grund dafür angeben, dass Graph II und Graph III nicht infrage kommen.



Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Bestimmen Sie nun mithilfe des Graphen von F aus Teil B Teilaufgabe 2c den Flächeninhalt der gesamten Vorderseite der Dachgaube (einschließlich des Fensters).
Beschreiben Sie unter Einbeziehung dieses Flächeninhalts die wesentlichen Schritte eines Lösungswegs, mit dem der Wert von a rechnerisch so bestimmt werden könnte, dass bei einer Fensterhöhe von 1,50 m der Teil der Vorderseite der Dachgaube, der in Abbildung 5 schraffiert dargestellt ist, den Flächeninhalt 6 m^2 hat.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Um einen Näherungswert für die Länge der oberen Profillinie der Vorderseite der Dachgaube berechnen zu können, wird G_f im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ durch vier Kreisbögen angenähert, die nahtlos ineinander übergehen und zueinander kongruent sind. Einer dieser Kreisbögen erstreckt sich im Bereich $0 \leq x \leq 2$ und ist Teil des Kreises mit Mittelpunkt $M(0|-1)$ und Radius 3. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des zu diesem Kreisbogen gehörenden Kreissektors und ermitteln Sie damit den gesuchten Näherungswert.