Abitur 2023 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil A a (2 BE)

Zeigen Sie, dass g in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

Teilaufgabe Teil A b (3 BE)

Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

Gegeben sind die Punkte $A(19|0|0)$, $B(0|19|0)$, $E(12|0|7)$ und $F(0|12|7)$ (vgl. Abbildung 1). Das Viereck ABFE liegt in der Ebene L.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABFE ein Trapez mit zwei gleich langen Seiten ist.

Teilaufgabe Teil B b (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform sowie die Größe φ des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0$; $\varphi \approx 55°$)

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEFGH, bei dem die quadratische Grundfläche ABCD parallel zur quadratischen Deckfläche EFGH liegt.
Der Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der $x_1 x_3$-Ebene als auch bezüglich der $x_2 x_3$-Ebene. Außerdem werden die Punkte $S_k(0|0|k)$ mit $k \in]7; +\infty[$ betrachtet, die Spitzen von Pyramiden EFGHS_k sind.

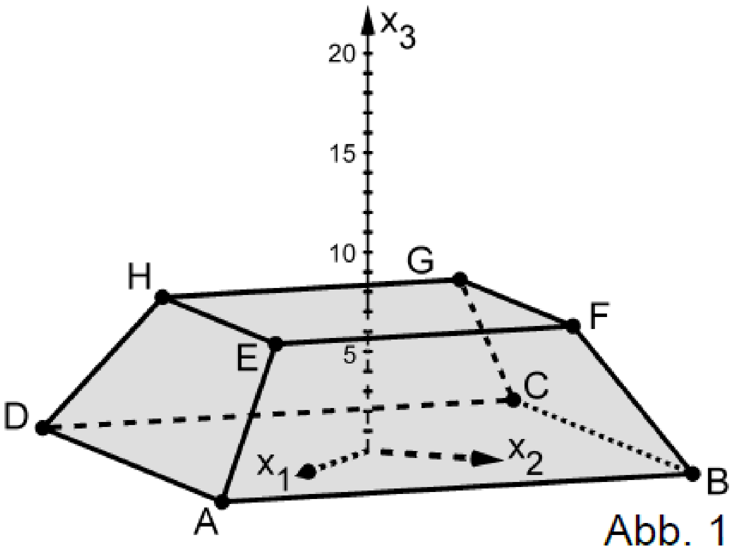

Abb. 1

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von k, für den die Pyramide EFGHS_k den Körper ABCDEFGH zu einer großen Pyramide ABCDS_k ergänzt.

(zur Kontrolle: $k = 19$)

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

Zeichnen Sie die Pyramide EFGHS_{15} in Abbildung 1 ein. Die Seitenfläche EFS_{15} und die Grundfläche EFGH dieser Pyramide schließen einen Winkel ein. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Größe dieses Winkels kleiner als 45° ist; verwenden Sie dazu folgende Information:

Für den Mittelpunkt M des Quadrats EFGH und den Punkt N mit $\overrightarrow{N} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{F}\right)$ gilt $\overline{MS_{15}} < \overline{MN}$.

Der Körper ABCDEFGHS$_{15}$ stellt modellhaft die Knickpyramide des Pharaos Snofru dar, die ca. 2650 v. Chr. in Ägypten erbaut wurde (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt die $x_1 x_2$-Ebene den horizontalen Boden; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 7 m in der Realität.

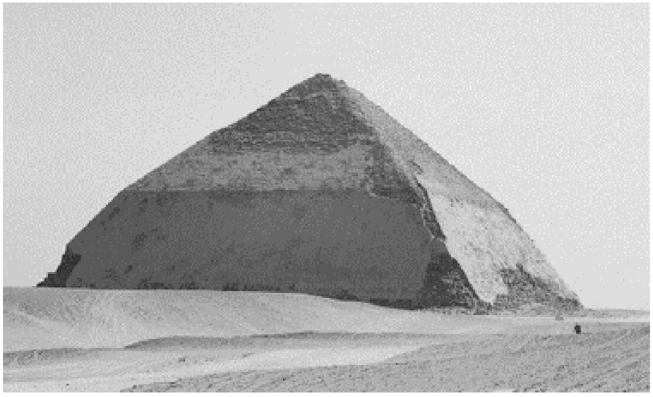

Abb. 2

Ursprünglich wurde mit dem Bau einer Pyramide begonnen, die im Modell der Pyramide ABCDS$_{19}$ entspricht. Aufgrund von Stabilitätsproblemen im Bauprozess musste die Neigung der Seitenflächen gegenüber dem Boden beim Erreichen einer bestimmten Höhe verändert werden. Der entstandene Knick ist namensgebend für die Pyramide.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Bestimmen Sie die Höhenänderung des Bauwerks, die durch die Bauplanänderung hervorgerufen wurde, in Metern. Begründen Sie, dass im unteren Teil des Bauwerks der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber dem Boden um mehr als 9° größer ist als im oberen Teil des Bauwerks.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen auf die Knickpyramide Sonnenstrahlen, die im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_{15}E}$ dargestellt werden. Der Schatten der Spitze der Knickpyramide auf dem horizontalen Boden wird durch den Punkt T beschrieben. Die Lote durch die Punkte E, F, G, H und S_{15} auf die $x_1\,x_2$-Ebene schneiden diese in den Punkten E', F', G', H' bzw. S'. Diese sind zusammen mit der Grundfläche der Pyramide und dem Punkt T in Abbildung 3 dargestellt.

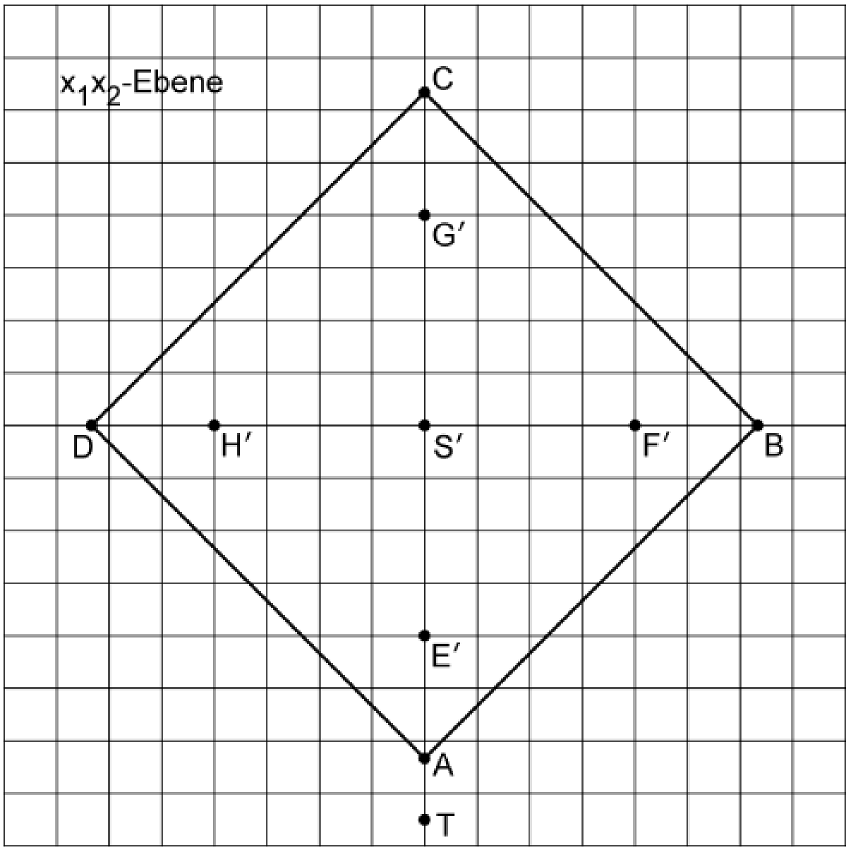

Abb. 3

Teilaufgabe Teil B f (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten von T.

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Der Schattenbereich der gesamten Pyramide auf dem Boden besteht im Modell aus zwei kongruenten Vierecken. Zeichnen Sie diesen Schattenbereich in Abbildung 3 ein und geben Sie die besondere Form der genannten Vierecke an.