# Abitur 2022 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_g$.

**Teilaufgabe Teil A 1a** (2 BE)

Geben Sie $D_g$ sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von $g$ an.

**Teilaufgabe Teil A 1b** (3 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph von $g$ in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt.

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f$ und $F$, wobei $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_F$ von $F$.

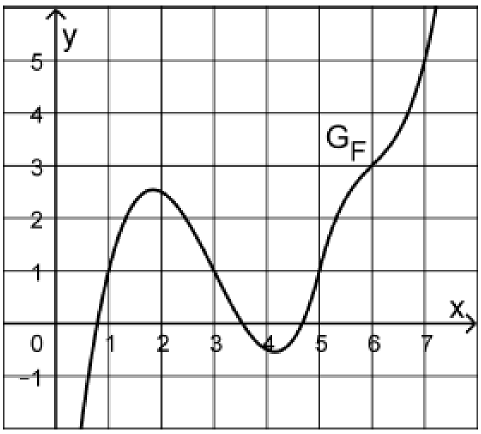


Abb. 1

**Teilaufgabe Teil A 2a** (2 BE)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^7 f(x)\, \mathrm{dx}$.

**Teilaufgabe Teil A 2b** (3 BE)

Bestimmen Sie den Funktionswert von $f$ an der Stelle 1; veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 1.

**Teilaufgabe Teil A 3a** (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto \ln(2x - 3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von $h$ sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von $h$ an.

**Teilaufgabe Teil A 3b** (3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f$ besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen $G_f$ von $f$.

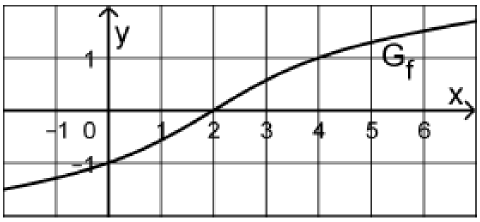

Abb. 2

Betrachtet wird die Funktion $g : x \mapsto \ln\,(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge $D_g$. Geben Sie $D_g$ an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle $x$, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a$ mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Teilaufgabe Teil A 4a** (1 BE)

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

**Teilaufgabe Teil A 4b** (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von $f_a$ im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von $a$, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f$ mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von $f$ ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

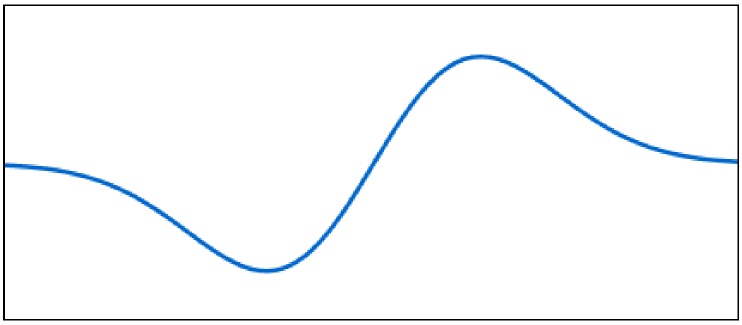

Abb. 1

**Teilaufgabe Teil B 1a** (4 BE)

Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von $f$, dass der Graph von $f$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass $f$ genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von $f$ für $x \to +\infty$.

**Teilaufgabe Teil B 1b** (2 BE)

Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion $f'$ von $f$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

**Teilaufgabe Teil B 1c** (5 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von $f$. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend.

**Teilaufgabe Teil B 1d** (3 BE)

Ist $g'$ die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g$, so gilt bekanntlich $\int\limits_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} \, \mathrm{dx} = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int\limits_0^1 f(x) \, \mathrm{dx}$.

**Teilaufgabe Teil B 1e** (3 BE)

Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

*Für jede Stammfunktion $F$ von $f$ und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt* $F(w) - F(0) \approx \int\limits_0^{2022} f(x)\ dx$.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

**Teilaufgabe Teil B 2a** (3 BE)

Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von $a$ an.

**Teilaufgabe Teil B 2b** (2 BE)

Der Graph der Funktion $f_0$ ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an.

**Teilaufgabe Teil B 2c** (3 BE)

Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen $a$, $a_1$ und $a_2$:

- $f_a(0) = 0$
- $f'_a(0) = f'_0(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

**Teilaufgabe Teil B 2d** (3 BE)

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von $a$ richtig ist:

*Wird der Graph von $f_a$ mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.*

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.
II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

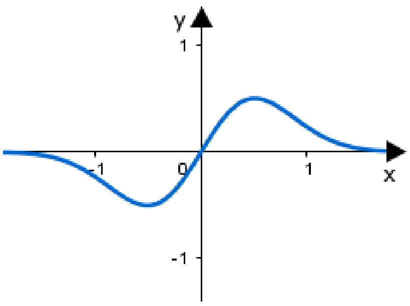

Abb. 2

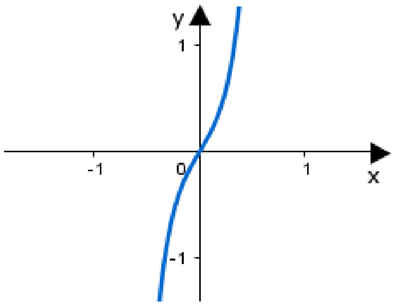

Abb. 3

Die Extremstellen von $f_a$ stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

**Teilaufgabe Teil B 2e** (3 BE)

Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe.

**Teilaufgabe Teil B 2f** (3 BE)

Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade.
Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt.

**Teilaufgabe Teil B 2g** (6 BE)

Für jeden positiven Wert von $a$ bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von $f_a$, der Punkt $\left(0|\dfrac{2}{v}\right)$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von $a$, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat.