Abitur 2022 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \dfrac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

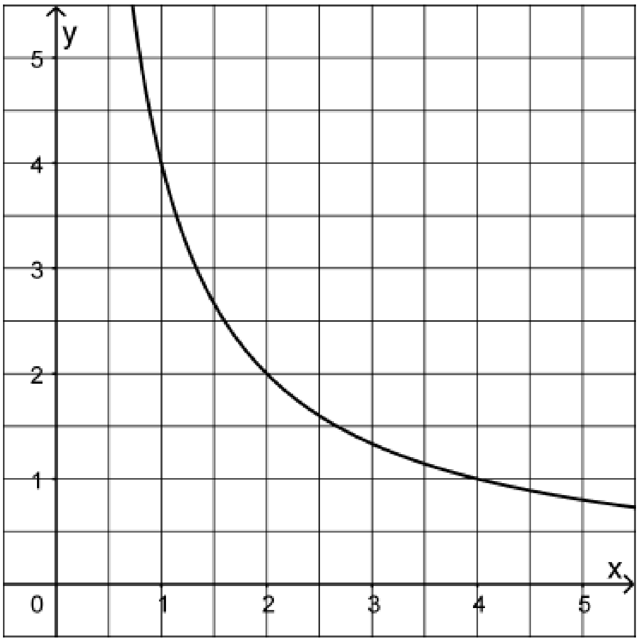


Abb. 1

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^e g(x)\ \mathrm{dx}$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1;4]$ überein.

Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

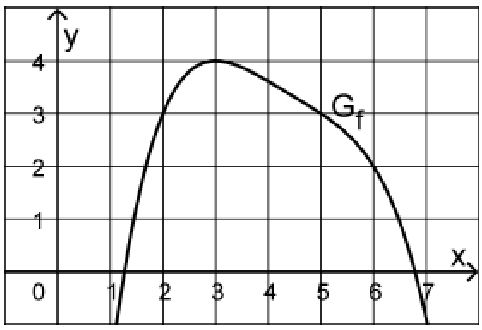


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe Teil A 4a (1 BE)

Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

Teilaufgabe Teil A 4b (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$.
Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(zur Kontrolle: 0 und 10)

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \dfrac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$; y-Koordinate des Hochpunkts: 10)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

I $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(x^2-10x) \cdot \sqrt{10x-x^2}}$ $\qquad$ II $\quad f''(x) = \dfrac{50}{(10x-x^2) \cdot \sqrt{10x-x^2}}$

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5-x) = f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen.
Begründen Sie damit, dass der Graph G_f symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 5$ ist.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \dfrac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

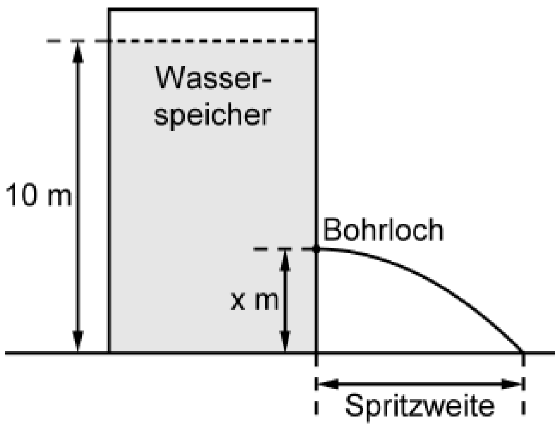
Teilaufgabe Teil B g (2 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

Teilaufgabe Teil B h (5 BE)

Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s|0)$ mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen.

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



Teilaufgabe Teil B i (1 BE)

Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3,6|9,6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B j (5 BE)

Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist.

Teilaufgabe Teil B k (4 BE)

Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g : t \mapsto 0,25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.
Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt.