

Abitur 2022 Mathematik Geometrie VI

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

Teilaufgabe Teil A a (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Teilaufgabe Teil A b (2 BE)

Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E ; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P . Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q .

Bestimmen Sie die Koordinaten von R .

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland.

Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A , B , C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



Abb. 1

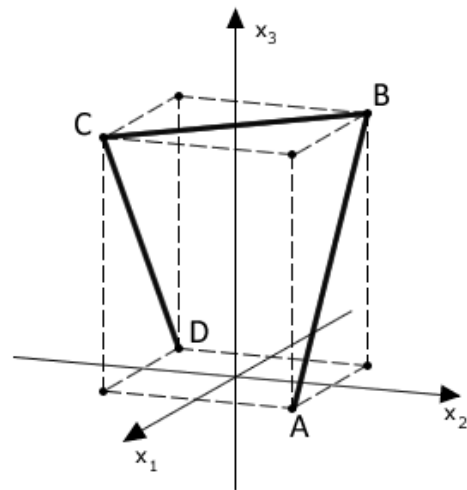


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3 -Achse liegen.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit.

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C , die Ebene F die Punkte B, C und D .

Teilaufgabe Teil B c (4 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die $x_1 x_2$ -Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und F berechnet werden kann.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.



Abb. 3



Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar.

Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Der Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h :

$$\text{I } \vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, t \in [0; 1] \quad \text{II } \vec{PQ} \circ \vec{AB} = 0 \quad \text{III } \overline{PQ} = 28 - h$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen.