Abitur 2021 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ und maximalem Definitionsbereich.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int\limits_2^3 f(x)\ \mathrm{dx}$.

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

$W =]-\infty; 1]$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

$W =]3; +\infty[$

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

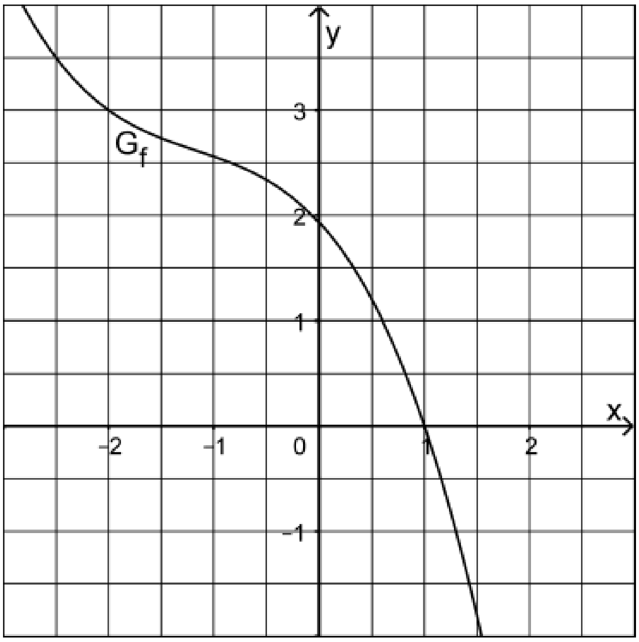
Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q\ (2|p(2))$.

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto a\,x^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1|0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt. Bestimmen Sie a und c.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$.
Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.



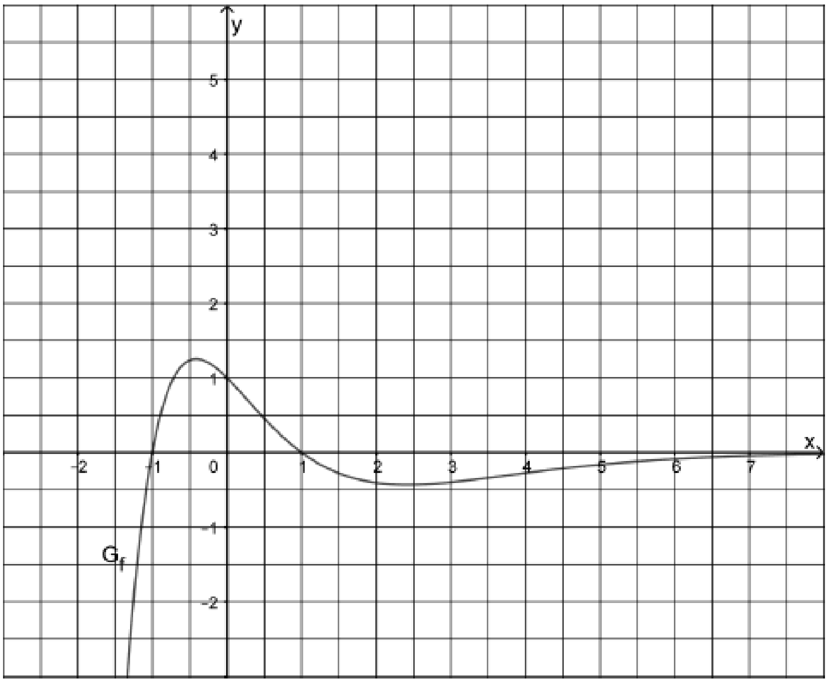
Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



Teilaufgabe Teil B 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) \cdot e^{-x}$)

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}$.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

Teilaufgabe Teil B 1d (2 BE)

Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k : x \mapsto \left(1 - k\,x^2\right) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet.
Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.

Teilaufgabe Teil B 1h (3 BE)

Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.

Teilaufgabe Teil B 1i (2 BE)

Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 2a (5 BE)

Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

(zur Kontrolle: $g'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$)

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W\ (0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.

Teilaufgabe Teil B 2d (6 BE)

Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert.