Abitur 2021 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (4 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \left(x^2 - 9x\right) \cdot \sqrt{2 - x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g und alle Nullstellen von g an.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

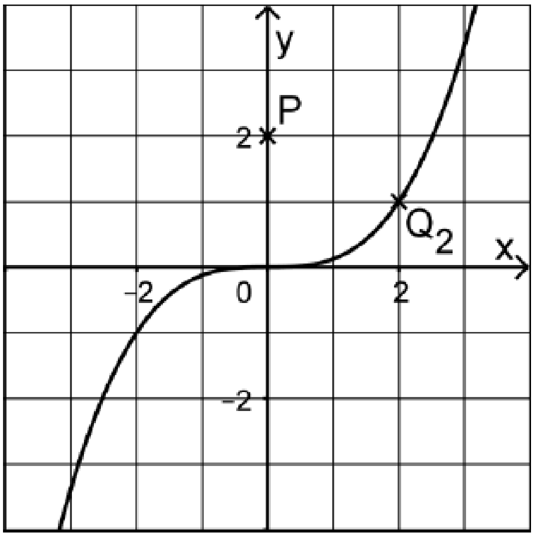
Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Der Graph von f schließt mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a\ (a|f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0|2)$ und Q_2.



Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3 - 16}{8a}$)

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft.

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an.
Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ und $]2;+\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\dfrac{6\cdot\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$)

Die Punkte $A(3|3,6)$ und $B(8|0,8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke [AB].

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[A\,B]$ eingeschlossen wird.

Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c} : x \mapsto \dfrac{a\,x+b}{x^2+c}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (1 BE)

Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

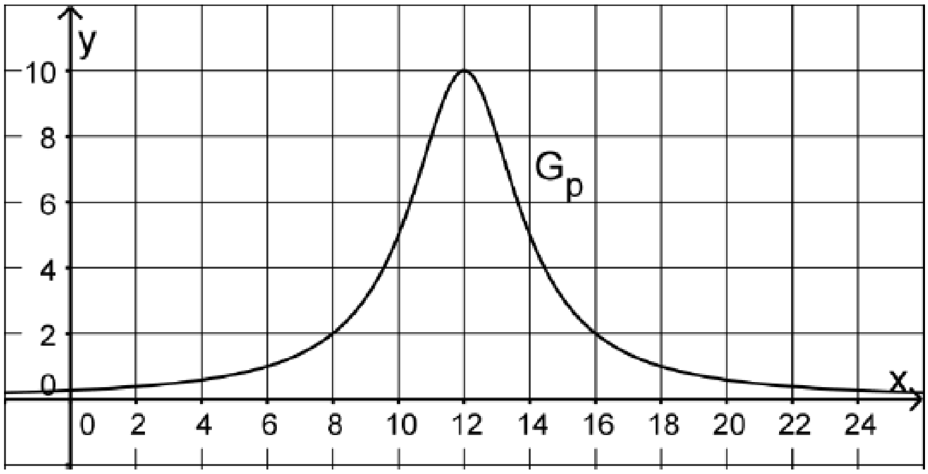
Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\dfrac{a\,x^2 + 2b\,x - a\,c}{(x^2+c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p : x \mapsto \dfrac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



Teilaufgabe Teil B 3a (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

Teilaufgabe Teil B 3b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

Teilaufgabe Teil B 3c (2 BE)

Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

Die in $[4; 20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4; 20]$.

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.