

Abitur 2021 Mathematik Geometrie VI

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt $P(10| - 42|10)$ beschrieben, seine Richtung durch den Vektor

$\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der $x_2 x_3$ -

Ebene liegt und den Mittelpunkt $M(0|0|20)$ sowie den Radius 3 hat.

Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft.

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche $ABCD$ mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat $EFGH$ mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$.

Der Mittelpunkt S des Quadrats $ABCD$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der $x_1 x_3$ -Ebene als auch bezüglich der $x_2 x_3$ -Ebene.

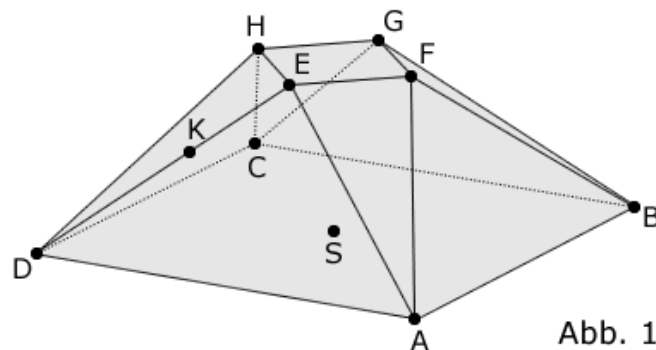


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist.

Teilaufgabe Teil B b (4 BE)

Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W . Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem.

(zur Kontrolle: $W : 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche ABCD einschließen.

Auf der Strecke [DE] gibt es einen Punkt K , für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

Teilaufgabe Teil B d (4 BE)

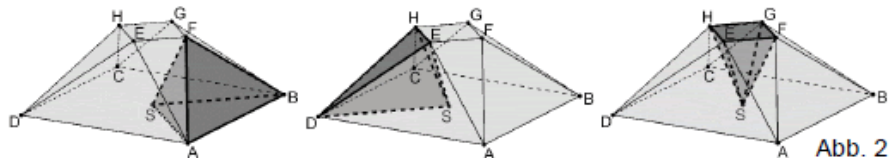
Bestimmen Sie die Koordinaten von K .

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

$N(1, 6|0|3, 2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke [KF]. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Gerade EN liegt.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden ABFS, HDES bzw. EFGHS ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide ABFS hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide HDES hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers.



Teilaufgabe Teil B g (4 BE)

Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel.