Abitur 2019 Mathematik Geometrie VI

Gegeben sind die beiden Kugeln k_1 mit Mittelpunkt $M_1(1|2|3)$ und Radius 5 sowie k_2 mit Mittelpunkt $M_2(-3|-2|1)$ und Radius 5.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass sich k_1 und k_2 schneiden.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Schnittfigur von k_1 und k_2 ist ein Kreis. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts und den Radius dieses Kreises.

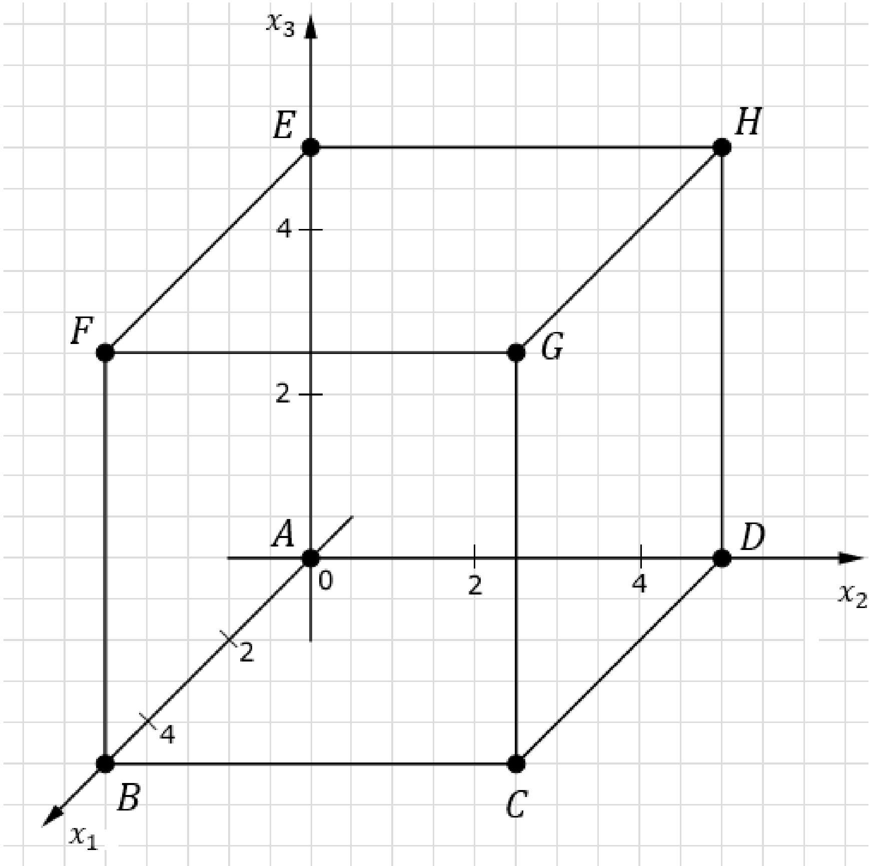
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Ebene $E : 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform.

(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade $g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche CDHG in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x_1 = 2,5$.

Teilaufgabe Teil B d (2 BE)

Ein beliebiger Punkt $P\ (p_1|p_2|p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Kante $[F\,G]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.