

Abitur 2019 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(5|-4|-3)$, $B(5|4|3)$, $C(0|4|3)$ und D .

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten von D und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[AC]$ an.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Begründen Sie, dass die Dreiecke BCM und ABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen zu berechnen.

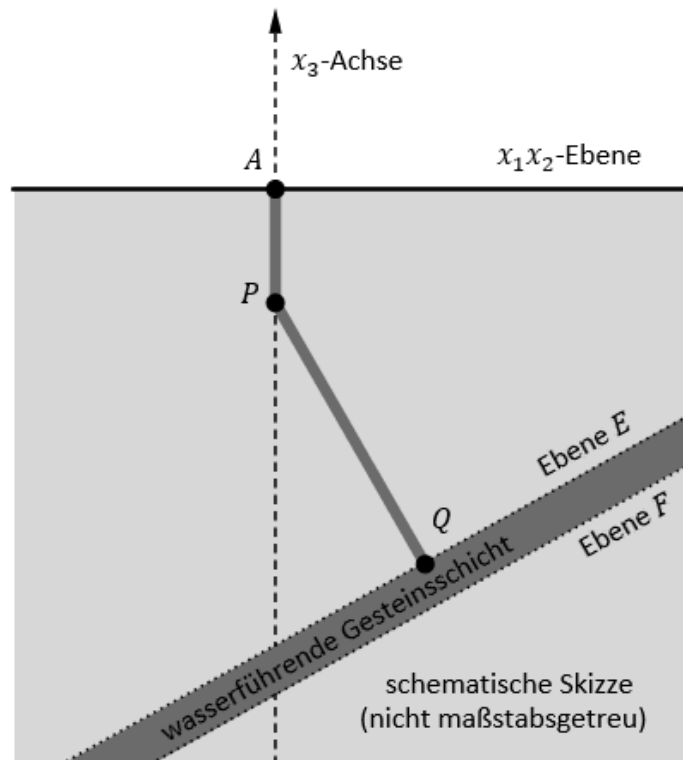
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Die Ebene $E : 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die $x_1 x_2$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $P(0|0|-1)$ und $Q(1|1|-3,5)$ beschrieben werden (vgl. Abbildung).



Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Beim Übergang zwischen den beiden Abschnitten des Bohrkanals muss die Bohrrichtung um den Winkel geändert werden, der im Modell durch den Schnittwinkel der beiden Geraden AP und PQ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene E und die untere Begrenzungsfläche in einer zu E parallelen Ebene F . Die Ebene E enthält den Punkt Q . Die Strecke $[PQ]$ steht senkrecht auf der Ebene E (vgl. Abbildung).

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E : 4x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 43 = 0$)

Teilaufgabe Teil B d (6 BE)

Der Bohrkanal wird geradlinig verlängert und verlässt die wasserführende Gesteinsschicht in einer Tiefe von 3600 m unter der Erdoberfläche. Die Austrittsstelle wird im Modell als Punkt R auf der Geraden PQ beschrieben. Bestimmen Sie die Koordinaten von R und ermitteln Sie die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht auf Meter gerundet.

(zur Kontrolle: x_1 - und x_2 -Koordinate von $R : 1,04$)

Ein zweiter Bohrkanal wird benötigt, durch den das entnommene Wasser abgekühlt zurück in die wasserführende Gesteinsschicht geleitet wird. Der Bohrkanal soll geradlinig und senkrecht zur Erdoberfläche verlaufen. Für den Beginn des Bohrkanals an der Erdoberfläche kommen nur Bohrstellen in Betracht, die im Modell durch einen Punkt $B(t | -t | 0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden können.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Zeigen Sie rechnerisch, dass der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht im Modell im Punkt $T(t | -t | -4,3)$ erreicht, und erläutern Sie, wie die Länge des zweiten Bohrkanals bis zur wasserführenden Gesteinsschicht von der Lage der zugehörigen Bohrstelle beeinflusst wird.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Aus energetischen Gründen soll der Abstand der beiden Stellen, an denen die beiden Bohrkanäle auf die wasserführende Gesteinsschicht treffen, mindestens 1500 m betragen. Entscheiden Sie auf der Grundlage des Modells, ob diese Bedingung für jeden möglichen zweiten Bohrkanal erfüllt wird.