Abitur 2018 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil A 1 (6 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \sqrt{3x-5}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Geben Sie D an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(3|f(3))$.

Teilaufgabe Teil A 2 (5 BE)

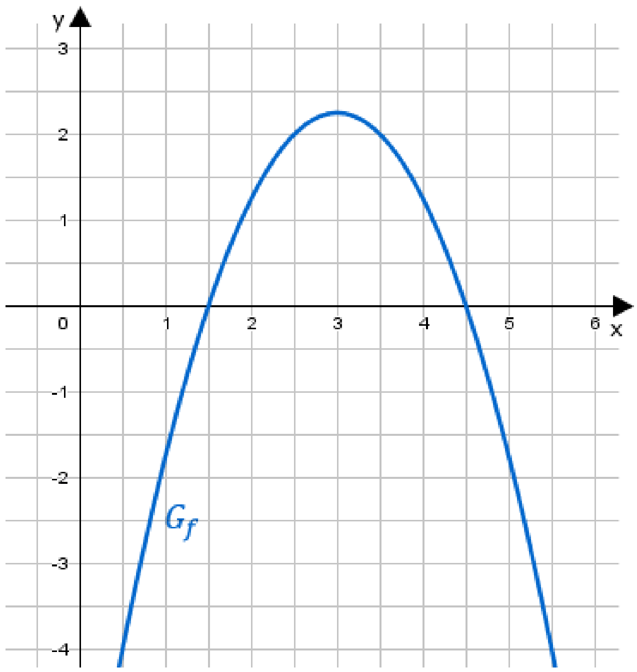
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$.
Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:
(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A\ (5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.
(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B\ (-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $y = -36x - 36$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 3 (4 BE)

Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f(t)\ dt$.

Wie viele Nullstellen hat F? Machen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung plausibel.



Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

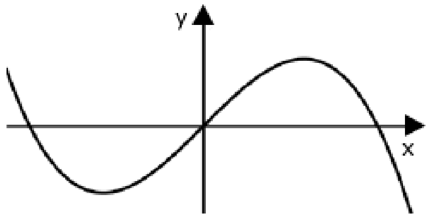


Abb. 1

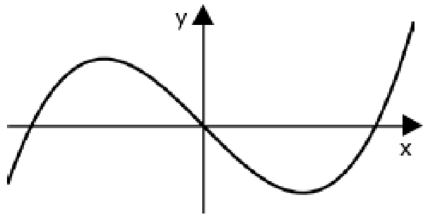


Abb. 2

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

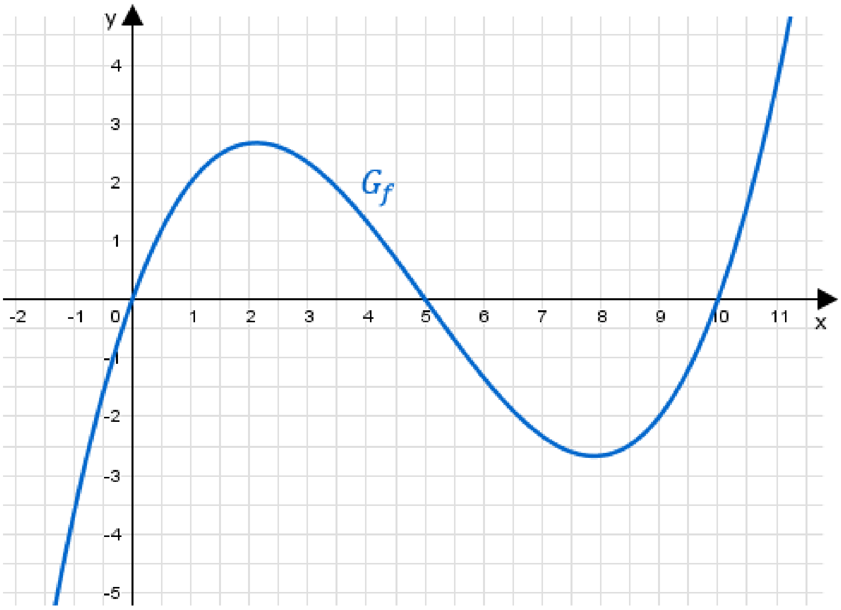


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 15x^2 + 50x\right)$)

Teilaufgabe Teil B 1b (6 BE)

Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{18} \cdot \left(x^3 - 25x\right)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Ermitteln Sie, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x) = \int\limits_1^x f(t)\ \mathrm{dt}$ betrachtet.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

F_1 hat für $0 \leq x \leq 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe.

Teilaufgabe Teil B 1e (2 BE)

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat.

Teilaufgabe Teil B 1f (2 BE)

Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat.

Teilaufgabe Teil B 1g (6 BE)

Für $0 \leq x \leq 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen,
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen,
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h.

Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0; 9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

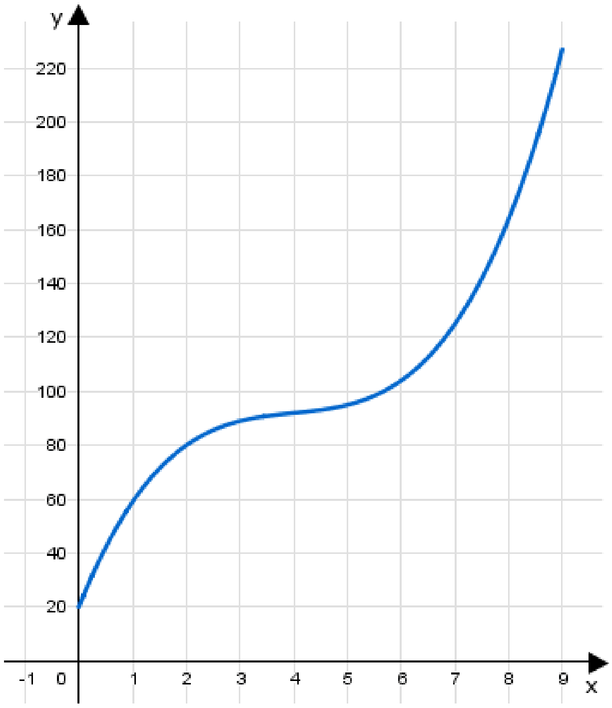


Abb. 2

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

Teilaufgabe Teil B 2d (5 BE)

Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.