Abitur 2018 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Kugel mit Mittelpunkt $M(1|4|0)$ und Radius 6.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P\ (5|1|p)$ auf der Kugel liegt.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt $B(-3|8|2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung von g.

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punkts, in dem g_a die $x_1 x_2$-Ebene schneidet.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die $x_1\,x_2$ -Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2,5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2,5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

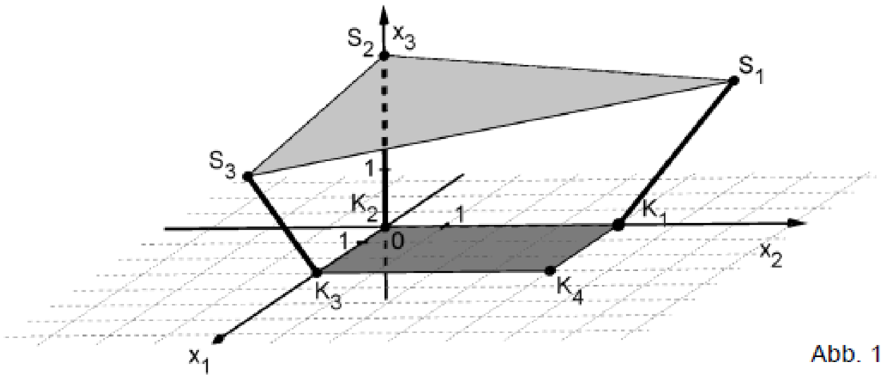

Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als 20 m^2 durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1 K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2 -Achse liegt.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

S_3' hat die Koordinaten $(6|-2|0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens 8° gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

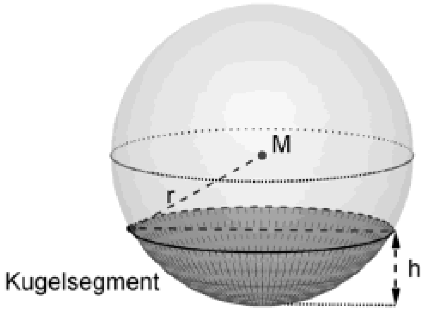

Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi\, h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.