Abitur 2017 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \dfrac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y = x + 7$ für G_f an.

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

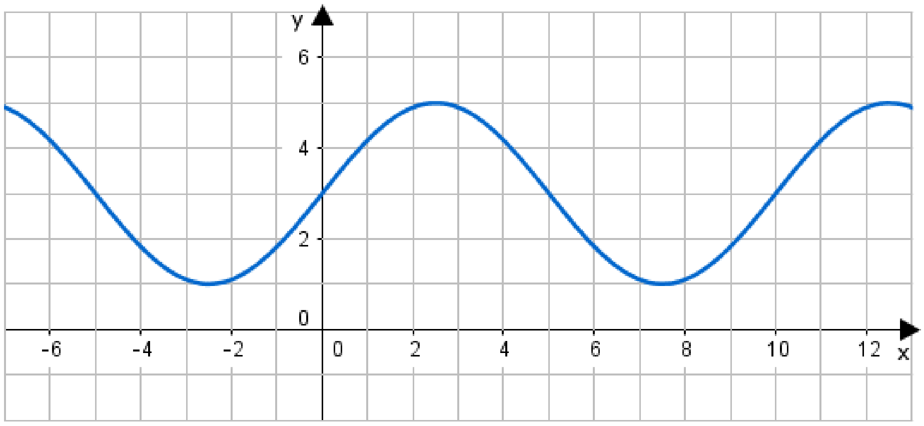
Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}$.



Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Geben Sie p, q und r an.

Teilaufgabe Teil A 3b (1 BE)

Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x} \cdot \left(2e^{-x} - 1\right)$ und $x \in \mathbb{R}$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f sowie die einzige Nullstelle $x = \ln 2$ von f.

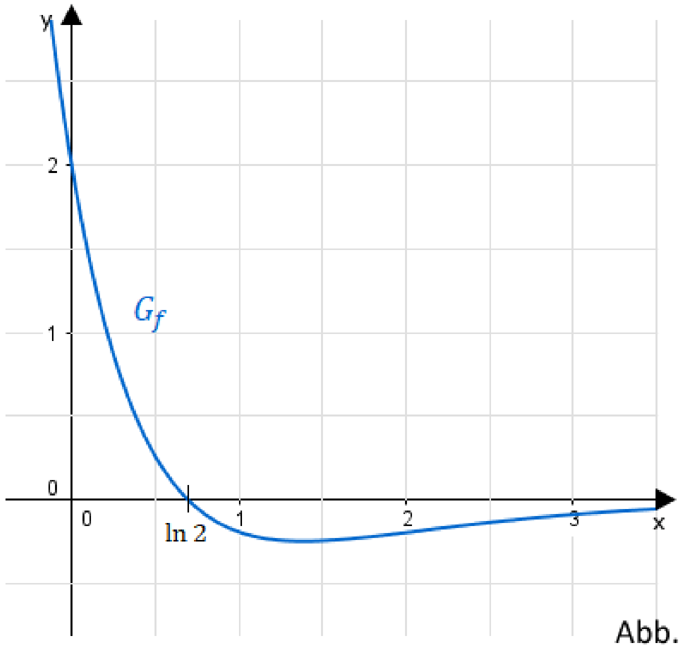


Abb. 1

Teilaufgabe Teil B 1a (3 BE)

Zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion f' von f gilt: $f'(x) = 2e^{-x} \cdot \left(1 - 4e^{-x}\right)$.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Extrempunkts: $\ln 4$)

Zusätzlich ist die Funktion F mit $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie anhand des Terms von F, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ gilt.

Teilaufgabe Teil B 1d (5 BE)

Der Graph von F verläuft durch den Punkt $(\ln 2|0,5)$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F keine größeren Werte als $0,5$ annehmen kann und bei $x = \ln 4$ eine Wendestelle besitzt. Berechnen Sie die y-Koordinate des zugehörigen Wendepunkts.

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse sowie des Funktionswerts $F(0)$ im Bereich $-0,3 \leq x \leq 3,5$ in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das durch das Dreieck mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(\ln 2|0)$ und $Q(0|2)$ angenähert werden kann. Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Dreiecks $O\,P\,Q$ vom Inhalt des Flächenstücks abweicht.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion F_0 mit $F_0(x) = \int\limits_0^x f(t)\ \mathrm{dt}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil B 1g (4 BE)

Begründen Sie, dass F_0 mit der betrachteten Stammfunktion F von f übereinstimmt. Interpretieren Sie geometrisch den Wert $F_0(2) \approx 0,234$ mithilfe von in Abbildung 1 geeignet zu markierenden Flächenstücken.

Teilaufgabe Teil B 1h (2 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die eine Stammfunktion, aber keine Integralfunktion von f ist.

Zur Modellierung einer Zerfallsreihe wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich in einem Gefäß zu Beginn eines Beobachtungszeitraums ausschließlich der radioaktive Stoff Bi211 befindet. Jeder Atomkern dieses Stoffs Bi211 wandelt sich irgendwann in einen Kern des radioaktiven Stoffs Tl207 um und dieser wiederum irgendwann in einen Kern des Stoffs Pb207. Abbildung 2 zeigt diese Zerfallsreihe schematisch.

Abb. 2

Der zeitliche Verlauf des Bi 211-Anteils, des Tl207-Anteils und des Pb207-Anteils der Kerne im Gefäß lässt sich durch die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen B, F bzw. P beschreiben, deren Terme der folgenden Tabelle zu entnehmen sind. Dabei ist F die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion.

Bi 211	Tl 207	Pb 207
$B(x) = e^{-2x}$	$F(x)$	$P(x) = 1 - B(x) - F(x)$

Für jede der drei Funktionen bezeichnet $x \geq 0$ die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in der Einheit 6 Minuten. Beispielsweise bedeutet $P(1) \approx 0,400$, dass sechs Minuten nach Beginn der Beobachtung etwa 40,0% aller Kerne im Gefäß Pb207-Kerne sind.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Bestimmen Sie jeweils auf zehntel Prozent genau die Anteile der drei Kernsorten zwölf Minuten nach Beobachtungsbeginn.

Teilaufgabe Teil B 2b (2 BE)

Ermitteln Sie unter Verwendung von Ergebnissen aus Aufgabe 1 den Zeitpunkt auf Sekunden genau, zu dem der Anteil von Tl 207-Kernen im Gefäß am größten ist.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Begründen Sie rechnerisch, dass zu keinem Zeitpunkt die Anteile der drei Kernsorten gleich groß sind.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Weisen Sie mithilfe des Terms der Funktion P nach, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 1$ gilt, und interpretieren Sie diesen Grenzwert im Sachzusammenhang.