Abitur 2017 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w : x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int\limits_0^2 g(x)\ \mathrm{dx} = 0$.

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

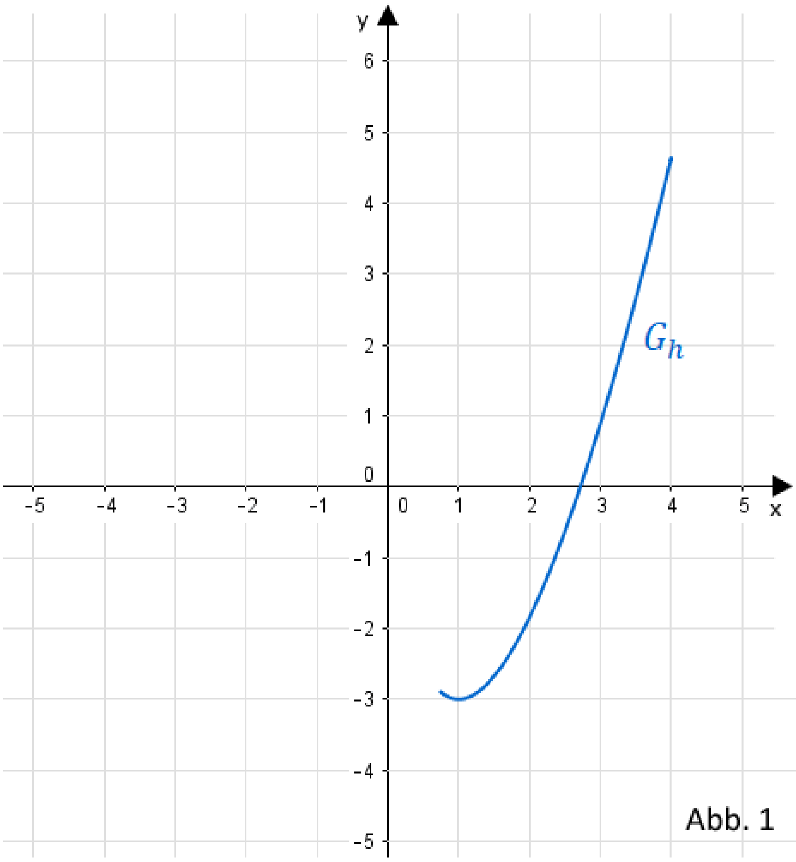
Teilaufgabe Teil A 4a (3 BE)

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

Teilaufgabe Teil A 4b (2 BE)

Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\frac{1}{h}$ beträgt.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0,75 \leq x \leq 4$.



Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e|0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0,75$ in Abbildung 1 ein.

Die Funktion $h^* : x \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.
(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)

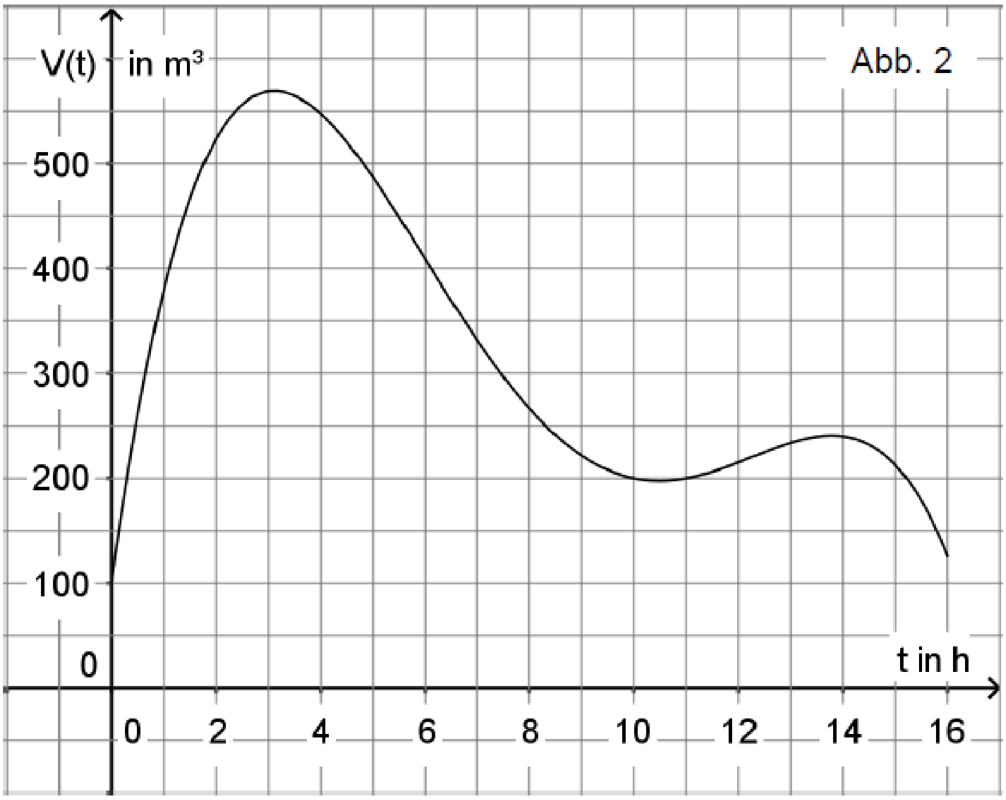
Teilaufgabe Teil B 1e (3 BE)

Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von h^* unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere der Lage von Punkt S, in Abbildung 1 ein.

Teilaufgabe Teil B 1f (4 BE)

Schraffieren Sie in Abbildung 1 ein Flächenstück, dessen Inhalt A_0 dem Wert des Integrals $\int\limits_e^{x_S} (x - h^*(x))\ \text{dx}$ entspricht, wobei x_S die x-Koordinate von Punkt S ist. Der Graph von h^*, der Graph der Umkehrfunktion von h^* sowie die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit Inhalt A ein. Geben Sie unter Verwendung von A_0 einen Term zur Berechnung von A an.

Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $[0; 16]$ definierten Funktion $V : t \mapsto V(t)$. Sie beschreibt modellhaft das sich durch Zu- und Abfluss ändernde Volumen von Wasser in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei bezeichnen t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $V(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 jeweils näherungsweise das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn sowie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 450 m^3 beträgt.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen der Funktion V näherungsweise die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Teilaufgabe Teil B 2c (3 BE)

Erläutern Sie, was es im Sachzusammenhang bedeutet, wenn für ein $t \in [0;10]$ die Beziehung $V(t+6) = V(t) - 350$ gilt. Entscheiden Sie mithilfe von Abbildung 2, ob für $t = 5$ diese Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

In einem anderen Becken ändert sich das Volumen des darin enthaltenen Wassers ebenfalls durch Zu- und Abfluss. Die momentane Änderungsrate des Volumens wird für $0 \leq t \leq 12$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : t \mapsto 0,4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Volumens in $\frac{m^3}{h}$.

Teilaufgabe Teil B 2d (4 BE)

Begründen Sie, dass die Funktionswerte von g für $0 < t < 7,5$ positiv und für $7,5 < t < 12$ negativ sind.

Teilaufgabe Teil B 2e (6 BE)

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts des Integrals $\int\limits_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$ für $0 \leq a < b \leq 12$ im Sachzusammenhang. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, das sich 7,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn im Becken befindet, wenn zu Beobachtungsbeginn 150 m^3 Wasser im Becken waren. Begründen Sie, dass es sich hierbei um das maximale Wasservolumen im Beobachtungszeitraum handelt.