Fachabitur 2022 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

Gegeben ist die lineare Funktion $g : x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

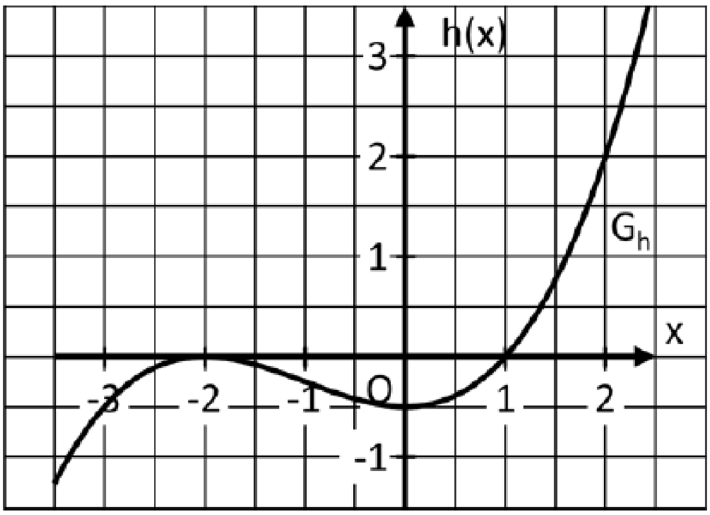
Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Berechnen Sie $\int\limits_0^2 g(x)\ \mathrm{dx}$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch bezüglich G_g.

Teilaufgabe 2. (3 BE)

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden.

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2;1[$
b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.
c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

Teilaufgabe 3. (2 BE)

Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k : x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet.

Teilaufgabe 4. (4 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.

Bestimmen Sie die Wertemenge von f.

Teilaufgabe 5. (6 BE)

Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

Teilaufgabe 6. (2 BE)

Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B : t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienanzahl in einer Petrischale.

Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0,4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 7.1 (3 BE)

Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an.

Teilaufgabe 7.2 (3 BE)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}\left(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x\right)$ darstellen lässt.

Teilaufgabe 7.3 (11 BE)

Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{25}(x-3)(x-10)(x-20)$]

Teilaufgabe 7.4 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Teilaufgabe 7.5 (4 BE)

Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke.

Landwirte beklagen zunehmend Ernteausfälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein.
Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion $E : t \mapsto 56,3 \cdot e^{c \cdot t} + a$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^-$ und $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Funktionswert von E gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ($t_0 = 0$).
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 8.1 (3 BE)

Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017.

Teilaufgabe 8.2 (4 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c der Funktion E. Runden Sie c auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt: $E(t) = 56,3 \cdot e^{-0,11 \cdot t} + 30$

Teilaufgabe 8.3.1 (3 BE)

Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für sie ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre.

Teilaufgabe 8.3.2 (3 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von E für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Teilaufgabe 8.3.3 (4 BE)

Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30% geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modell, eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt.