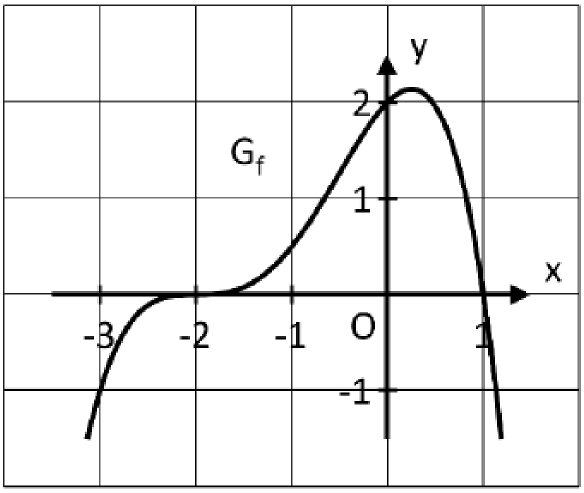
Fachabitur 2021 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind.

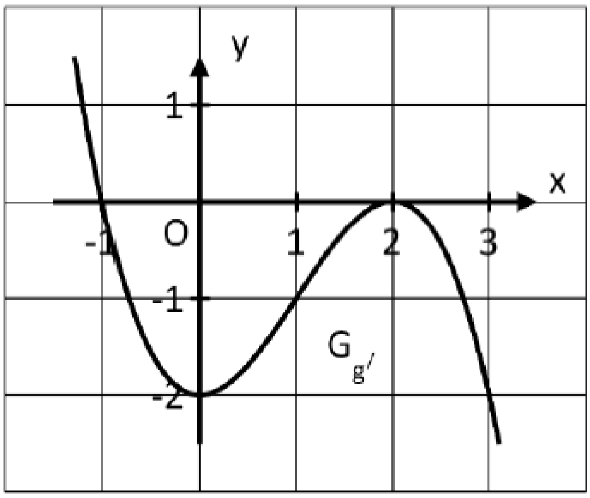
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$
b) $f''(1) < 0$
c) $f''(-2) = f'(-2)$
d) $W_f = \mathbb{R}$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}\left(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8\right)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt.

g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'.
Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



Teilaufgabe 2.1 (2 BE)

Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte.

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an.

Teilaufgabe 3. (5 BE)

Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
h(x)	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
k(x)		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden unktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5 \cdot x}$
B) $-x + 7$
C) $3^{0,5 \cdot x} + 6$
D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an.

Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad drei verläuft durch den Punkt $P(-1|0,5)$ und besitzt im Schnittpunkt mit der y-Achse einen Wendepunkt. Für die Wendetangente G_t gilt $t : y = 2x + 1$ mit der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -1,5x^3 + 2x + 1$]

Teilaufgabe 4.2 (8 BE)

Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt.

Teilaufgabe 4.3 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Tangente G_t im Bereich $-1,5 \leq x \leq 1,5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

Teilaufgabe 4.4 (5 BE)

Der Graph G_f, die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 4.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verwendet. Dabei steht die Variable t für die Beobachtungszeit t in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ startet. Der jeweilige Funktionswert von T gibt die Temperatur des Tees in $^\circ C$ zum Zeitpunkt t an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8:55 Uhr eine Temperatur von 80°C. Um 9:15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch 30°C.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Teilaufgabe 5.1 (5 BE)

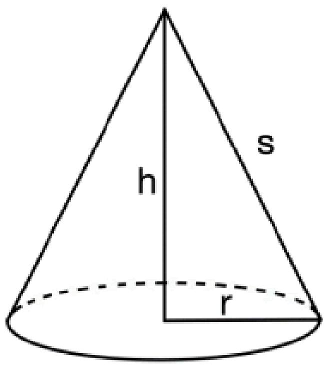
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion T für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 58$; $b = -0,1$

Teilaufgabe 5.2 (3 BE)

Als angenehm wird eine Trinktemperatur von 54°C empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Temperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten.

Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge $s = 8$m, hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Mantellinie von der Höhe h des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion $V : h \mapsto V(h)$ beschreibt dieses Innenvolumen.
Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe h des Tipi Zeltes mindestens 4 m und maximal 6 m betragen. Dabei steht h für die Höhe des Zelts in m und $V(h)$ für das Volumen des Zelts in m^3.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 6.1 (3 BE)

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{1}{3}\pi\, h^3 + \frac{64}{3}\pi\, h$]

Teilaufgabe 6.2 (8 BE)

Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall den Durchmesser des Bodens des Tipi Zeltes. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.