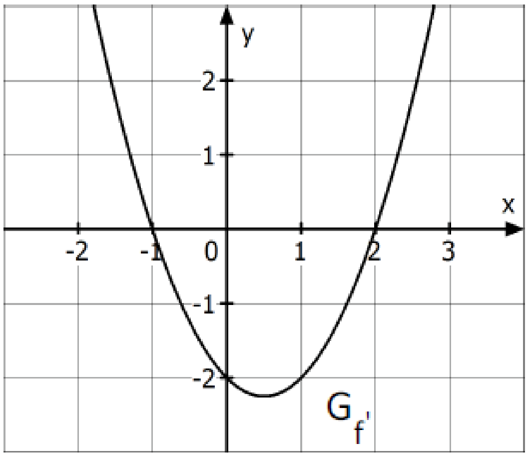
Fachabitur 2020 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A II

In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise eine Parabel. Diese ist der Graph der Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Leiten Sie nachvollziehbar aus dem Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion f' die Lage und Art der lokalen Extremstellen von f ab. Begründen Sie, weshalb die relativen Extrempunkte des Graphen von f nicht absolut sein können.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ die Lage der Wendestelle von f und entscheiden Sie begründet, ob die Wendetangente des Graphen der Funktion f steigt oder fällt.

Teilaufgabe 2. (5 BE)

h sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.
Für die zugehörige erste Ableitungsfunktion gilt die Funktionsgleichung $h'(x) = x^2 + 1$.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h' und begründen Sie damit, dass der Graph der Funktion h genau eine Nullstelle besitzt. Geben Sie außerdem einen möglichen Funktionsterm für h an.

Im Folgenden sind zwei Gleichungen gegeben. Lösen Sie die erste und zeigen Sie die Unlösbarkeit der zweiten.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)

$2x^4 - 18x^2 = 0$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)

$e^{x+1} + e^{x-1} = 0$

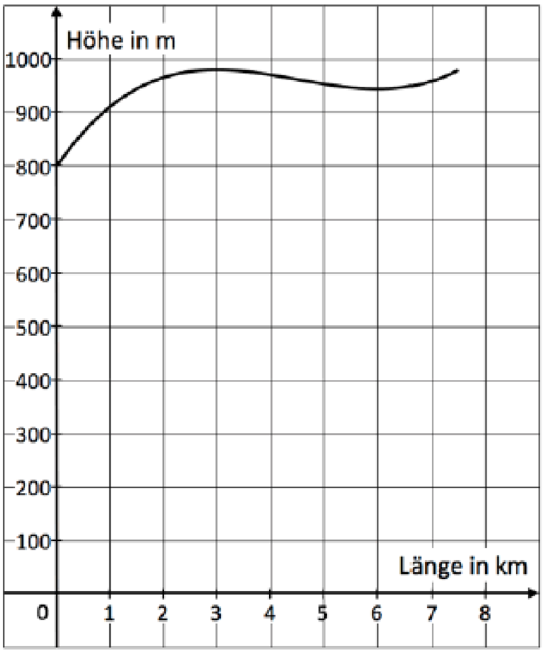
Teilaufgabe 4. (4 BE)

Eine ganzrationale Funktion g habe höchstens den Grad fünf.
Die Tabelle zeigt das Krümmungsverhalten des Graphen G_g.

x∈	]−∞;1]	[1 ; 4]	[4 ; ∞[
G_g	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

Geben Sie die Wendestellen der Funktion g an und argumentieren Sie, welchen Grad g nur haben kann.

Ein Teilstück einer Langlaufloipe verläuft von oben betrachtet geradlinig und hat im Querschnitt das abgebildete Profil, welches annähernd durch den Graphen der Funktion $f : x \mapsto 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 18x + 100\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [0; 7,5]$ beschrieben werden kann.
Die x-Achse gibt die Länge in waagrechter Richtung an, auf der y-Achse ist die Höhe über dem Meeresspiegel aufgetragen.
Die Koordinaten x und y stellen Längenangaben in der Einheit Kilometer bzw. Meter dar.



Teilaufgabe 5.1 (6 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Teilintervalle von D_f, in denen die Loipe auf- bzw. abwärts verläuft.

Teilaufgabe 5.2 (3 BE)

Berechnen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe 5.1, in welcher horizontalen Entfernung vom Beginn des Teilstückes der Loipe maximale Höhe erreicht wird. Geben Sie an, in welcher Höhe Sporttreibende sich am höchsten Punkt der Loipe befinden.

Teilaufgabe 5.3 (4 BE)

Ermitteln Sie, nach wie vielen Kilometern in horizontaler Entfernung vom Ausgangspunkt die Loipe am steilsten abwärts verläuft.

Teilaufgabe 5.4 (3 BE)

Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung der Loipe in Prozent auf den ersten drei Kilometern.

Teilaufgabe 5.5 (4 BE)

Die Steigung der Loipe bei Kilometer 2 tritt im weiteren Verlauf der Loipe noch einmal auf. Berechnen Sie die Stelle, an der dies der Fall ist.

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 2 - 5e^{-0,1x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 6.1 (5 BE)

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_g bezüglich des Koordinatensystems sowie das Verhalten der Funktionswerte von g für $|x| \to \infty$.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen G_g an.

Teilaufgabe 6.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen von g. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Teilaufgabe 6.3 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g. Begründen Sie, warum dieser absolut ist und geben Sie die Wertemenge W_g der Funktion g an.

[Teilergebnis: $g'(x) = x \cdot e^{-0,1x^2}$]

Teilaufgabe 6.4 (3 BE)

Stellen Sie die Gleichung der Tangente an G_g an der Stelle $x = 3$ in allgemeiner Form auf.

Teilaufgabe 6.5 (3 BE)

Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_g können auch ohne Verwendung der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Begründen Sie dies mithilfe bekannter Ergebnisse. Verwenden Sie dabei die Tatsache, dass nur höchstens ein Extrempunkt von G_g existiert.

Teilaufgabe 6.6 (3 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion g im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm