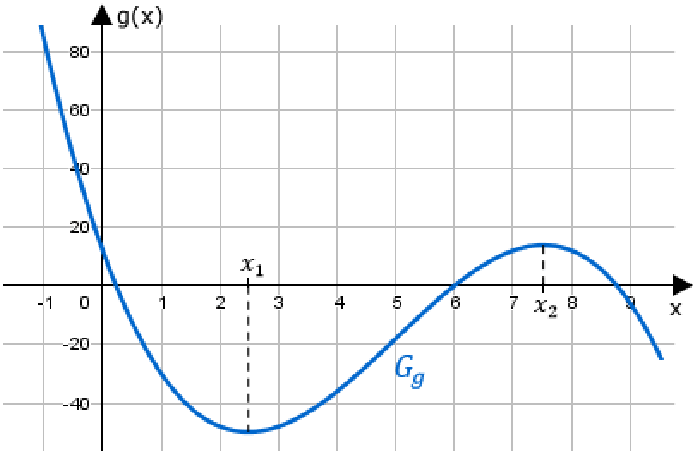
Fachabitur 2017 Mathematik NT Infinitesimalrechnung A I

Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g \in \mathbb{R}$, deren Graph G_g in nebenstehender Abbildung dargestellt ist.
Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt:
G_g hat bei der Nullstelle $x = 6$ eine Tangente G_t mit $t : y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ und besitzt den Wendepunkt $W(5| - 18)$.



Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Skizzieren Sie den Graphen $G_{g'}$ der 1. Ableitungsfunktion von g in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die max. Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion g' an.

Zur Bestimmung des Funktionsterms $g(x)$ ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{lr}
\text{(I)} & 216a + 36b + 6c + d = 0 \\
\text{(II)} & 125a + 25b + 5c + d = -18 \\
\text{(III)} & 108a + 12b + c = 16 \\
\text{(IV)} & 30a + 2b = 0
\end{array}$$

Teilaufgabe 1.2.1 (4 BE)

Geben Sie nachvollziehbar an, welche Ansätze zu diesen Gleichungen führen.

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)

Bestimmen Sie $g(x)$ mithilfe der Gleichungen aus 1.2.1.

Gegeben ist nun die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{10} \cdot g(x) = \frac{1}{10}\left(-x^3 + 15x^2 - 56x + 12\right)$ mit $D_f \in \mathbb{R}$, wobei g die Funktion aus Teilaufgabe 1.2.2 ist. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)

Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-1 \leq x \leq 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm.

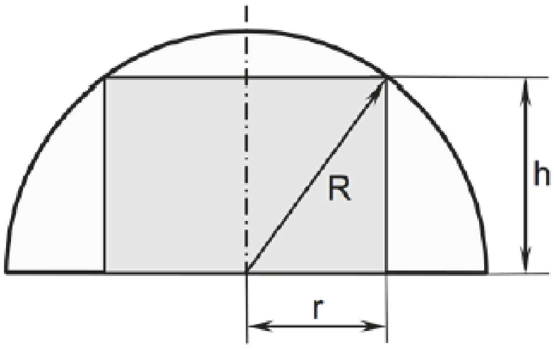
Teilaufgabe 2.5 (2 BE)

Es gilt $\int\limits_{-2}^{6} f(x)\ \mathrm{dx} = 0$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis in Bezug auf G_f.

Teilaufgabe 2.6 (7 BE)

Die Parabel G_p mit $p(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2$ und $D_p \in \mathbb{R}$ schließt mit G_f im I. und IV. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein.
Zeichnen Sie G_p für $-1 \leq x \leq 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein, schraffieren Sie das linke der beiden Flächenstücke und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.

Einer Halbkugel mit Radius $R = 10$ cm soll ein Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Ermitteln Sie die Maßzahl $V(h)$ des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $V : h \mapsto V(h)$ an, wenn die Höhe h mindestens 6 cm betragen soll.

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = h\,\pi\,\left(100 - h^2\right)$]

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)

Berechnen Sie h so, dass $V(h)$ den absolut größten Wert annimmt, und untersuchen Sie, ob das maximale Volumen $V_{\max}$ des Zylinders mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens beträgt.